

Alle Tiere der Welt und die Staatsverschuldung in Dezibel

Logarithmische Skalen dienen der Übersicht über viele Größenordnungen – und der Verharmlosung.

Von Norbert Treitz

Um Noah, der mit dem Schiffsbau weit hinter dem Terminplan liegt, etwas aufzuhelfen, übermittelt ihm Gott (durch göttliche Eingebung) die moderne Dezimalschreibweise für Zahlen, einschließlich des Kommas zum Notieren gebrochener Zahlen. Während schwarze Wolken den 40-tägigen Dauerregen ankündigen und Noah die letzten Planken seiner Arche verpicht, kommt ihm die Idee, seine neuerworbenen Fähigkeiten zur Buchführung zu nutzen. Beim Einchecken vermisst er jedes Tier mit seiner Elle, notiert dessen Körperlänge und wirft einen Kieselstein in einen von neun Körben, je nachdem, mit welcher Ziffer das Messergebnis beginnt – und wundert sich, dass der Einserkorb sich viel schneller füllt als alle anderen.

Sein jüngster Sohn Japhet beobachtet das seltsame Treiben mit einem gewissen Misstrauen und fühlt sich in der Be-

fürchtung bestätigt, dass der 600 Jahre alte Herr in der letzten Zeit etwas abgebaut habe. Warum sollen Körperlängen zwischen, sagen wir, einer und zwei Ellen häufiger vorkommen als andere? Der Junior, der sich mit seinen 570 Jahren noch richtig fit fühlt, vermutet einen systematischen Fehler und wiederholt die Messreihe, wählt aber vorsichtshalber als Maßeinheit nicht die Elle, sondern die Handspanne oder auch halbe Elle. Zu seiner Überraschung landen auch diesmal im Einserkorbchen wesentlich mehr Kiesel als in jedem anderen.

An einem langweiligen Regentag auf hoher See setzen Vater und Sohn sich zusammen und lösen das Rätsel: Alle die relativ handlichen Tiere, die Noah mit 0,5 bis 0,99... Ellen vermessen hatte (eine Elle waren etwa 45 Zentimeter), werden von Japhet als 1 bis 1,99... Handspannen lang sortiert. Also geraten alle Kiesel aus Noahs Körbchen 5 bis 9 in Japhets Korb 1; kein Wunder, dass der ziemlich

voll wird. Entsprechendes gilt für das Krabbelgetier von 0,05 bis (knapp unter) 0,1 Ellen Körperlänge ebenso wie für die Elefantenklasse (mehr als fünf, aber weniger als 10 Ellen). Dagegen verteilt sich der Inhalt von Noahs Korb 1 bei Japhet auf die Körbe 2 und 3 (Kasten unten).

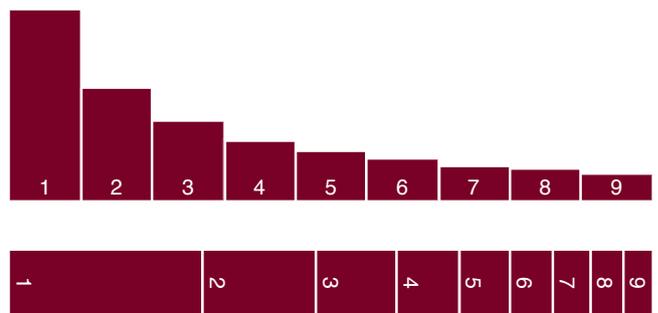
Das Phänomen beobachtet man nicht nur bei den Körperlängen von Tieren, sondern allgemein bei großen Mengen von Zahlen, die proportional zu physikalischen Größen und über viele Größenordnungen (das heißt hier Potenzen der verwendeten Ziffernbasis) verteilt sind. Es zeigt sich, dass die Breiten der Körbe sich verhalten müssen wie die Differenzen der Logarithmen benachbarter einstelliger Zahlen. Das ist das – 1938 formulierte – Gesetz von Frank Benford (1887–1948).

Anders gesagt: Die ersten Stellen der Logarithmen aller Zahlen nach dem Komma verteilen sich gleichmäßig auf zehn gleich breite Kästchen von 0 bis 9

BENFORDS GESETZ UND DIE LOGARITHMISCHE SKALA



Wenn Noah die Körperlängen aller Tiere auf seiner Arche misst, beginnen weit mehr Messwerte mit einer Eins als mit jeder anderen Ziffer – unabhängig von der Maßeinheit (unten, oberes Balkendiagramm). Um alle Körbe gleichmäßig zu füllen, muss Noah für die kleineren Anfangsziffern entsprechend breitere Körbe vorsehen (die Rechtecke aus der oberen Häufigkeitsverteilung sind einfach quergelegt). Die Anordnung der Körbe im Kreis (rechts) zeigt, dass



(und bei anderen Ziffernbasen als unserer Zehn entsprechend). Damit erklärt sich auch die Beobachtung Simon Newcombs zu den ungleichmäßig abgegriffenen Logarithmentafeln, mit denen diese Rubrik im vergangenen Monat endete (siehe auch Spektrum der Wissenschaft 4/1994, S. 16).

Es ist plausibel, dass alle Intervalle, die ein festes Verhältnis zwischen Ende und Anfang haben (zum Beispiel 1,1 zu 1) gleich viele Kieselsteine enthalten. Das ist offenbar skaleninvariant, sprich unabhängig von der gewählten Maßeinheit. Die logarithmische Gleichverteilung erfüllt diese Skaleninvarianz.

Das Gesetz von Benford gilt nicht für beliebige Zahlenmengen. Gegenbeispiele sind:

- ▶ die Körperhöhen erwachsener Menschen, denn sie liegen in einem engen Bereich: Das Verhältnis zwischen dem größten und dem kleinsten Wert ist relativ klein;
- ▶ Einwohnerzahlen von Städten zwischen 25 000 und 100 000, aus demselben Grund;
- ▶ Telefonnummern, denn die Ziffern darin sind beliebige Zeichen, die nichts mit Größen zu tun haben.

Die neutrale Sieben

Vor einigen Jahren waren neutrale Flüssigseifen eine gute Alternative zur (etwas) ätzenden, nämlich alkalischen gewöhnlichen Seife. Mittlerweile bevorzugt man

»hautneutrale« Seifen, die deswegen so gut verträglich sind, weil sie eben nicht neutral sind, sondern leicht sauer, sozusagen neutral relativ zur ebenfalls leicht sauren Haut. Auf der Flasche finden wir den pH-Wert 5,5. Was steckt dahinter? Wieder einmal Logarithmen!

Das Wassermolekül H_2O hat eine kleine, aber wichtige Tendenz, ein H^+ -Ion abzuspalten. Das kann als armes Proton nicht allein herumschwimmen, sondern dockt an ein anderes H_2O an, das dadurch zum Oxonium H_3O^+ wird (früher auch Hydronium oder Hydroxonium genannt). Das verbleibende Ion OH^- nennt sich (nach wie vor) Hydroxidion. Die Reaktionsbeziehung ist also $2H_2O \leftrightarrow H_3O^+ + OH^-$.

Für dynamische Reaktionsgleichgewichte haben Cato Maximilian Guldberg und Peter Waage 1864 ein Gesetz mit dem antiquierten Namen »Massenwirkungsgesetz« gefunden. Unter nicht allzu exotischen Bedingungen gilt für die in Mol pro Liter (1 mol sind rund $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen) gemessenen Konzentrationen p , dass $p(H_3O^+) \cdot p(OH^-)$ etwa 10^{-14} ist. In reinem und daher neutralem Wasser sind beide Faktoren gleich und müssen somit den Wert 10^{-7} haben. Von jeder der beiden Ionensorten sind also rund $6 \cdot 10^{16}$ Exemplare in einem Liter von immer noch neutralem Wasser.

Alkalische Stoffe wie NaOH bringen nun zusätzliche Hydroxidionen mit. Damit das obige Produkt wieder den richtigen Wert hat, muss die Menge der Oxoniumionen abnehmen. Umgekehrt geben Säuren H^+ -Ionen ab und erhöhen damit die Oxonium-Konzentration, weswegen die Hydroxid-Konzentration abnimmt.

Die 5,5 aus der hautverträglichen Flüssigseife bedeuten nun (etwas vereinfacht), dass in einem Liter $10^{-5.5}$ Mol Oxoniumionen sind, also rund 32-mal so viele wie im neutralen Wasser. Hydroxid und Oxonium sind jetzt nicht mehr 1:1 vorhanden, sondern 1:1024 oder ausführlicher $(1/32) : 32$.

In der Bezeichnung »pH-Wert« deutet das p die Konzentration an (genauer: die Aktivität, was hier nicht näher diskutiert werden soll) und das H das Oxoniumion, das früher als H^+ gezählt wurde. Die entscheidende Einzelheit muss man sich ohne Buchstaben merken: Gemeint ist der negative Zehnerlogarithmus dieser Konzentration. Da hilft es auch nicht besonders viel, wenn man » p_H -Wert«

statt »pH-Wert« schreibt. Werte über 7 bedeuten alkalisches (= basisches) Verhalten, solche unter 7 saures, und jede Stufe bedeutet einen Faktor 10 der Konzentrationen von Hydroxid und (gleichzeitig gegenläufig) Oxonium, also 100 für ihr Zahlenverhältnis.

Die pH-Skala ist in diesem Sinn auch für Laien handlich, wenn man einmal zur Kenntnis genommen hat, dass der Neutralpunkt die Sieben ist.

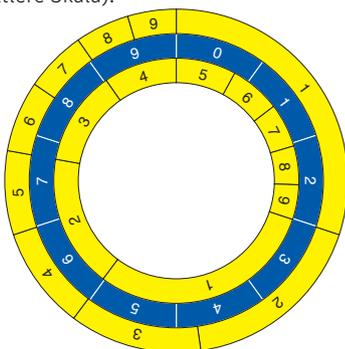
Tonhöhen und Frequenzen

Die abgegriffene Länge auf einer Saite ist umgekehrt proportional zu ihrer Schwingungsfrequenz, wie wir seit Marin Mersenne (1588–1648) wissen. Nun werden Töne fast immer von Obertönen mit ganzzahligen Vielfachen der Frequenz begleitet. Erklingen zwei Töne mit niedrig-rationalem Frequenzverhältnis zugleich, so fallen viele von diesen Obertönen zusammen, was wir als Konsonanz empfinden. Darum sind Intervalle wie die Quint (Frequenzverhältnis 3:2) oder die große Terz (5:4) bei Hörern wie bei Komponisten sehr beliebt. Im Fall des Verhältnisses 2 sind sogar die Obertöne des höheren Tons eine echte Teilmenge von denen des tieferen. Es ist daher kaum ein Zufall, dass wir solchen Tönen sogar den gleichen Namen geben, unterschieden nur noch durch Indexnummern oder verschieden viele Strichlein.

Die Tastatur eines Klaviers und die übliche Notenschrift sind eigentlich logarithmische Skalen, denn gleiche Abstände auf der Tastatur wie auf dem Notenpapier bedeuten nicht etwa gleiche Frequenzunterschiede, sondern gleiche Frequenzverhältnisse. Und das gilt auch nur ungefähr, weil aus historischen Gründen zwischen zwei weißen Tasten mal ein Halbton, mal ein Ganzton liegt; diese Inkonsequenz wird in der Notenschrift getreulich reproduziert. Zu allem Überfluss kommen keine reinen Terzen und keine reinen Quinten heraus, wenn man in der heute bei Tasteninstrumenten üblichen gleichstufigen Stimmung die Oktave in zwölf gleiche Halböne mit dem Frequenzverhältnis $2^{1/12}$ einteilt.

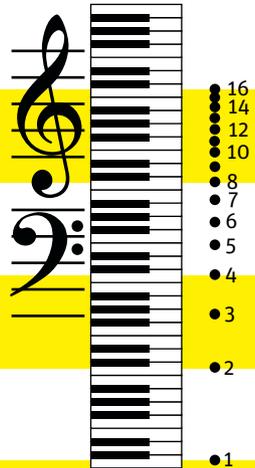
Die verschiedenen »wohltemperierten« Stimmungen des 18. Jahrhunderts sind wieder etwas anderes. Sie realisieren zwar auch »alle Tonarten« auf genießbare Weise, aber keineswegs mit lauter gleichen Intervallen. Allein Andreas Werckmeister (1645–1706) hat vier verschiede-

es nicht darauf ankommt, ob man in Ellen (Noahs Skala, innen) oder in Handspannen (Japhets Skala, außen) misst. Im Gegensatz zu den Größen selbst gilt bei deren Logarithmen für die erste Ziffer hinter dem Komma die Gleichverteilung (mittlere Skala).



CHRISTOPH PÖPPE, NACH NORBERT TREITZ

Widerstände (Serie E12)	lg y	y	Filmempfind- lichkeit	Magni- tudo	Frequenz (Hertz)	Ober- töne
1000	3,0	1000	-30	0	1024	
820	2,9	800	-29	30	800	
680	2,8	700	-28			
560	2,8	600	-28			
470	2,7	500	-27		512	
390	2,6	400	-26	27	400	
330	2,5	300	-25			
270	2,4	300	-25			
220	2,3	200	-24	24	200	
180	2,3	200	-24			
150	2,2	200	-24			
120	2,1	200	-24			
100	2,0	100	-20	21	100	
82	1,9	80	-19			
68	1,8	70	-18		64	
56	1,8	60	-18			
47	1,7	50	-17	18	50	
39	1,6	40	-16			
33	1,5	30	-15		32	
27	1,4	30	-15			
22	1,3	20	-13			
18	1,3	20	-13			
15	1,2	20	-13		16	
12	1,1	20	-13			
10	1,0	10	-10			
8,2	0,9	8	-9			
6,8	0,8	7	-8			
5,6	0,8	6	-8			
4,7	0,7	5	-7			
3,9	0,6	4	-6			
3,3	0,5	3	-5			
2,7	0,4	3	-5			
2,2	0,3	2	-3			
1,8	0,3	2	-3			
1,5	0,2	2	-3			
1,2	0,1	1	-1			
1,0	0,0	1	0			



Verschiedene Skalen über drei Zehner- oder zehn Zweierpotenzen. Schwarze Ziffern geben die jeweiligen Größen im Klartext an, bunte in logarithmischen Pseudoeinheiten. Gelb-weiße Zebrastrifen zeigen Oktaven (Zweierpotenzen) an.

kräftigen chemischen Sprengstoff, der 4,2 Megajoule pro Kilogramm freisetzt. Ein wenig Nachrechnen ergibt eine erstaunlich einfache Faustformel: Ein Kilogramm TNT kann ein Erdbeben der Magnitude 0 machen, ein Faktor 1000 addiert zwei Richter-Einheiten. Für die Nachahmung des Roermond-Bebens bräuchte man also eine Milliarde Kilogramm TNT, das ist eine Megatonne. Das Seebeben 2004 war aber 30 000-mal so stark.

Auch wenn die Richter-Skala nach oben nicht begrenzt ist: Die Erdbeben sind es, und zwar gar nicht weit über dieser Stärke, etwa bei 9,5. Noch stärkere Verspannungen der Erdkruste lösen sich offenbar stets in kleineren Schritten.

Ist die Skala denn wenigstens nach unten begrenzt? Eine lineare Skala hört unten bei 0 auf, aber wir haben es ja mit einer logarithmischen zu tun. Ein kräftiger Faustschlag auf den Tisch mit einer Energie von 4 Joule löst immerhin ein Erdbeben der Stärke -4 aus.

Ganz harmloser Lärm?

Wenn Sie der Krach einer Baumaschine neben Ihrem Wohnzimmer stört, sind Sie sicher nicht von der Ankündigung erbaut, dass demnächst zehn solche Maschinen dort arbeiten werden. Der Akustiker beruhigt Sie: Es sind statt 80 Dezibel dann eben 90, also nur 10 Dezibel mehr. Sind das wirklich nur 12 Prozent? Der für Ihr Nervensystem zuständige Arzt findet das weniger beruhigend. Es stimmt zwar, dass man den Unterschied zwischen 50 und 60 Maschinen als etwa eben so deutlich wie den zwischen 5 und 6 wahrnimmt und nicht zehnmal so stark, aber die damit begründete Umrechnung von Energiestromdichten in logarithmische Einheiten ist doch ziemlich verwirrend. Vor allem wirkt sie im Sinn einer beachtlichen und durch nichts zu rechtfertigenden Verharmlosung.

Schall ist ein Transport von Energie, mit dem (hörbare) Strukturen mitlaufen. Eine dauernd tätige Schallquelle hat eine Sendeleistung (in Watt messbar) und erzeugt in verschiedenen Entfernungen

dene »wohltemperierte« Stimmungen vorgeschlagen, nicht aber die gleichstufige. Leider verwechseln fast alle Physik- und erschreckend viele Musiklehrbücher und Großlexika »wohltemperiert« und »gleichstufig«.

Erdbeben

Im April 1992 erzählten einige Kollegen bei uns in Duisburg, dass sie wegen eines Erdbebens fast aus dem Bett gefallen seien, während andere (darunter ich) durchgeschlafen und nichts bemerkt hatten. Es war seit Jahrhunderten das stärkste Erdbeben in Mitteleuropa, hatte sein Epizentrum in Roermond (Niederlande) und die Stärke 6 auf der der nach Charles Richter benannten Skala.

Ende 2004 kamen durch ein Seebeben mit Tsunami im Indischen Ozean über 230 000 Menschen um, wie wir noch in bedrückender Erinnerung haben. Seine Stärke war zirka 9. War es nur anderthalbmal so stark wie das bei uns?

Früher wurde bei Erdbebenmeldungen immer dazugesagt, dass die Richter-Skala »nach oben offen« sei, aber damit war nur gemeint, dass sie nicht ein

endlicher Kriterienkatalog ist wie etwa die Mercalli-Skala oder auch die ursprüngliche Windstärkenskala von Beaufort, sondern dass ihre Zahlen aus Messungen hergeleitet werden.

Beim Erdbeben misst man die Amplituden gewisser Wellen an verschiedenen Orten und kann daraus abschätzen, welche Energie insgesamt freigesetzt worden ist. Bekanntlich geht die Leistung quadratisch mit der Amplitude, aber auch die Dauer ist bei stärkeren Beben länger, und es kommt empirisch heraus, dass zur 100-fachen Amplitude etwa die 1000-fache Gesamtenergie gehört. Geben wir nun die gemessenen Amplituden logarithmisch zur Basis 10 als »Richter-Magnitude« an, so bekommen wir für die geschätzte Energie eine Skala zur Basis $\sqrt{1000}$, also etwa 31,6.

Was bedeutet demnach der Unterschied zwischen 9 und 6, also 3 Magnituden? Rund den Faktor 30 000 für die Energie.

Haben wir Vergleichswerte für andere Vorgänge als Erdbeben? Seit es Kernwaffen gibt, vergleicht man ihre Sprengkraft mit Trinitrotoluol (TNT), einem

entsprechende Energiestromdichten (in Watt pro Quadratmeter).

Für Wellen in gewissen Frequenzbereichen sind unsere Ohren außerordentlich empfindlich. Bei 1000 Hertz sprechen sie bereits auf die Energiestromdichte der Größenordnung 1 Pikowatt (10^{-12} Watt) pro Quadratmeter (auf dem Trommelfell) an. Dabei ist die Amplitude des Wechseldrucks etwa 30 Mikropascal, sein Effektivwert rund 20 Mikropascal. Das ist der Druck, den eine Wasserschicht von wenigen Atomlagen Dicke in unserem Schwerfeld ausübt!

Leider geht es meistens wesentlich lauter zu. Richtig schmerzhaft wird es bei dreimillionenfachen Amplituden des Wechseldrucks, also der zehnbillionenfachen Energiestromdichte, das sind 13 Dezimalstellen mehr.

Nun kann man ganz einfach die Zahl der Dezimalstellen als (logarithmisches) Maß für die Intensität nehmen und als Pseudoeinheit das Bel einführen, benannt nach Alexander Graham Bell (1847–1922). Damit es nicht zu grob wird, wird die Zehnerpotenz noch in zehn Stufen geteilt, und man kommt zum Dezibel, einer »Einheit« zur Basis $10^{1/10} = 1,2589$.

Wie sich herausgestellt hat, ist nicht nur die Wahrnehmungsschwelle frequenzabhängig, sondern auch die schädigende Wirkung des Lärms. Man setzt daher vor das Messgerät ein Frequenzfilter, das den harmloseren Bereich entsprechend abschwächt gemäß einer Kurve A (oder B oder C). Die so »bewertete« Messung wird dann in dB(A) beziehungsweise dB(B) oder dB(C) angegeben.

Das alles scheint gut zum Weber-Fechner-Gesetz zu passen. Aber darüber hinaus gibt es zum Vergleich von gleich laut empfundenen Tönen verschiedener Frequenzen das Phon. Um auch noch zu formalisieren, welche Intensität man doppelt oder dreimal so laut empfindet wie eine andere, gibt es die Einheit Sone für die »Lautheit«, alles in sehr begrenzter Übereinstimmung mit Fechner.

Obwohl unsere Augen eine ebenso große Spannweite von Energiestromdichten bewältigen, kommt die Optik ganz gut ohne eine derartige Vielfalt von Größen und Einheiten aus. Lediglich in die Maßeinheiten Candela, Lumen und Lux ist eingearbeitet, dass die Empfindlichkeit des menschlichen Auges von der Frequenz des Lichts abhängt (ansonsten könnte man diese Größen in Watt beziehungsweise Watt pro Quadratmeter aus-

drücken); aber logarithmische Maße werden in der Optik außerhalb der Astronomie nicht gebraucht.

Viele Geheimsprachen machen den Benutzern das Leben kaum leichter, halten aber die Laien durch jede Menge von Un- und Missverständnissen draußen, auch bei Dingen, die an sich ganz leicht wären. Im Hermann-Löns-Deutsch müssen die Kinder lernen, dass Lauf ein Rohr oder ein Bein sein kann, mit Schweiß aber Blut gemeint ist, jedoch keinesfalls umgekehrt, und halten das Ganze dann vielleicht für biologische Bildung. Der unnötige Gebrauch von Potenzgesetzen ist noch viel wirkungsvoller als so ein Vokabular.

Nicht in die Irre führen!

Damit will ich den Normenausschüssen keine böse Absicht unterstellen, wohl aber mangelnde Rücksicht auf Laien und Schüler auf dem Weg zum Experten. Ein Kollege sagte einmal nur halb im Scherz, er habe keine Lust mehr, Astronomie in der Schule zu machen, weil man so viel Zeit und Aufmerksamkeit für überflüssige Einheiten und altertümliche Bezeichnungen aufwenden müsse.

Wir brauchen mehr und nicht weniger naturwissenschaftlich-technische Bildung bei Laien (Juristen, Politikern, ...), und die Natur ist schwierig genug. Wir sollten dem Verständnis nicht auch noch vermeidbare Hürden in den Weg legen. Die Aussage »Die eine Lärmquelle ist so laut wie zehn von der anderen Sorte zusammen« ist einfacher zu verstehen als »Die eine ist 10 dB lauter«. Und die Aussage, das harmlose Erdbeben von Roermond habe die Stärke 6 und das 30 000-mal so starke katastrophale vom Indischen Ozean auch nur 9, ist mit »irreführend« noch sehr vornehm charakterisiert.

Hoffen wir, dass nicht demnächst die Staatsverschuldung in Dezibel angegeben wird oder auf einer anderen nach oben offenen logarithmischen Skala, für die dann die Opposition den Namenspatron auswählen darf. ◁



Norbert Treitz ist apl. Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Vorliebe für erstaunliche Versuche und Basteleien sowie für anschauliche Erklärungen dazu nutzt er auch zur Förderung hoch begabter Kinder und Jugendlicher.

Das Netzwerk für die Generation der Junggebliebenen

Knüpfen Sie Kontakte zu Menschen Ihrer Wellenlänge.

Tauschen Sie Wissen, Erfahrungen und Meinungen.

Einfach und kostenlos im Online-Netzwerk für Junggebliebene.



Jetzt mitmachen!

www.platinnetz.de



Platinnetz
Verbindungen leben.