Experiment des Monats

Seltsame Effekte bei gekoppelten Pendeln, die über verschiedenartige Verbindungen wie Stäbe, Fäden, Federn oder Rohre miteinander wechselwirken.

Von Jearl Walker

Stellen Sie sich vor, daß Sie zwei gleiche Pendel durch eine elastische Feder miteinander verbinden, eines festhalten und das andere zur Seite ziehen, so daß die Feder gestreckt wird. Wie werden sich die gekoppelten Pendel (Bild 1) verhalten, wenn man sie losläßt?

Gefühlsmäßig würde man erwarten, daß die Feder das ursprünglich ruhende Pendel in Bewegung versetzen wird, bis schließlich beide Pendel ungeordnete Schwingungen mit ungefähr gleicher Energie ausführen. Überraschenderweise verhält es sich aber ganz anders: Die Energie wandert nämlich periodisch zwischen den beiden Pendeln hin und her, so daß sie in regelmäßigen Intervallen abwechselnd zur Ruhe kommen. Wie läßt sich diese Erscheinung erklären?

Bei einem typischen Beispiel für ein schwingungsfähiges System mit einer solchen periodischen Energieübertragung hängen zwei Pendel von einem waagerechten Stab herunter, der seinerseits mit zwei Fäden an einem starren Gestell aufgehängt ist (Bild 2). Stößt man eines der Pendel parallel zum Stab an, so beginnt es, seine gesamte Schwingungsenergie auf das benachbarte zu übertragen. Anschließend fließt die Energie wieder zurück. Bei diesem Vorgang kommen die beiden Pendel abwechselnd zur Ruhe.

In einem anderen Versuch hängen die Pendel von einem Faden herab und schwingen senkrecht zu dem Teilstück, das beide miteinander koppelt (Bild 3). Bei einer vergleichbaren Anordnung befestigt man sie an einem dünnen Rohr; es wird durch einen Faden gehalten, den man durch die Bohrung fädelt. Die Pendel schwingen senkrecht zum Rohr (Bild 4). In beiden Fällen findet ein periodischer Energieaustausch zwischen den Pendeln statt, während ihre Schwingungen stärker und schwächer werden.

Beim Federpendel (Bild 5) hängt man ein Gewicht ans Ende einer elastischen Feder, die an einem starren Gestell befestigt ist. Zieht man das Gewicht nach unten und läßt es dann los, so schwingt es eine Weile senkrecht auf und ab, aber dann geht die Bewegung in eine Pendelschwingung über. Wenn sie allmählich schwächer wird, erscheinen die senkrechten Oszillationen wieder. Die Anordnung verhält sich genauso, wenn man mit der Pendelbewegung beginnt.

Schwingung und Rotation bei Pendeln

Als letztes Beispiel möchte ich das Wilberforce-Pendel erwähnen, benannt nach dem englischen Physiker L. R. Wilberforce, der es 1894 untersuchte. Es besteht aus einem kleinen Gewicht, das etwa die Form einer Hantel hat (Bild 6) und an einer Feder aufgehängt ist. Zieht man es nach unten und läßt es anschließend los, so schwingt es auf und ab.

Diese Schwingungen werden allmählich schwächer; gleichzeitig beginnt das Gewicht, Torsionsschwingungen um seine eigene Achse in der waagerechten Ebene auszuführen. Hört die Feder schließlich auf, in der Senkrechten zu schwingen, so ist die gesamte Energie in diese Rotationsbewegung geflossen. Dann wird sie in die Federschwingung zurückübertragen, die wieder stärker wird, während die Drehbewegung abebbt; schließlich kann der Zyklus von neuem beginnen.

Lassen Sie mich die Erklärung der gekoppelten Pendel mit der Federkopplung beginnen (Bild 1). Ein solches Pendel ist vielleicht in der Praxis nicht so leicht aufzubauen wie die anderen, aber dafür kann man sich die Energieübertragung leichter vorstellen. Alle mit mechanischer Reibung und Luftreibung zusammenhängenden Effekte werde ich vernachlässigen.

Nehmen wir an, Pendel A werde festgehalten, während Pendel B nach rechts gezogen wird. Läßt man beide Pendel los, schwingt B nach links und rechts hin und her und drückt entweder die Feder zusammen oder zieht sie auseinander. Die Feder überträgt Druck und Zug auf Pendel A, das daraufhin zu schwingen beginnt. In diesem Stadium wirkt die Feder der Bewegung von B entgegen, während es die von A unterstützt. Sie bewirkt also die Energieübertragung von B nach A. Ist B die gesamte Energie entzogen worden, kehrt sich der Prozeß um.

Die Bewegung der gekoppelten Pendel läßt sich anhand ihrer Normalschwingungen analysieren: Das sind die zwei möglichen Schwingungsformen, bei denen keine Energie übertragen wird, und demnach die Amplituden (die Auslenkungen aus der Ruhelage) beider Pendel unverändert bleiben (Bild 7).

Die Normalschwingungen hängen mit der Symmetrie des gekoppelten Pendels zusammen. Angenommen, man zöge beide Pendel A und B in der gleichen Richtung und gleich weit aus der Ruhelage heraus und ließe sie dann los. Dann schwingen sie synchron, ohne daß sich die Länge der Feder ändert, so wie sie es ohne Kopplung tun würden. Da die Feder keine Energie überträgt, ist dies eine der Normalschwingungen.

Die andere Normalschwingung läßt sich anregen, indem man die beiden Pendel gleich weit in entgegengesetzter Richtung aus ihrer Ruhelage herauszieht und dann gleichzeitig freigibt. Ihre Schwingungsbewegung ist dann genau spiegelbildlich. Bei dieser Normalschwingung wird die Feder von den Pendeln gleichmäßig periodisch gestreckt und wieder zusammengedrückt; sie kann deshalb deren Bewegung nicht beeinflussen. Die Federkraft, die auf A einwirkt, ist zu der auf B wirkenden symmetrisch. Drückt die Feder beispielsweise A nach links, so wird B gleichzeitig genauso stark nach rechts gedrückt. Da die Symmetrie der Kräfte einen Energiefluß zwischen den Pendeln unmöglich macht, bleiben die Amplituden unverändert.

Läßt man ein Pendel frei schwingen, so ist seine Schwingungsfrequenz gleich der Wurzel aus dem Verhältnis der Erdbeschleunigung zur Fadenlänge des Pendels. In der ersten Normalschwingung haben beide Pendel diese Frequenz. Bei der zweiten Normalschwingung pendeln beide mit einer höheren Frequenz, weil die Federkraft sie zusätzlich antreibt.

Bewegen sich beispielsweise die Pendel aufeinander zu, so daß sie die Feder zusammendrücken, werden sie nicht nur durch die Schwerkraft in ihre Ruhelage zurückgetrieben, sondern auch durch die Federkraft. Schwingen die Pendel auseinander, übt die Feder eine zusätzliche Zugkraft aus. Die Schwingung wird so auf eine höhere Frequenz getrieben.

Die Normalschwingungen sind deshalb so wichtig, weil man jede Bewegung des Systems als Kombination von ihnen darstellen kann. Zunächst regt man die Pendel an, indem man nur B auslenkt und losläßt. Danach läßt sich die Bewegung jedes Pendels als Produkt zweier sinusförmiger Änderungen darstellen. Die eine davon ist schnell und hat eine Frequenz, die gleich dem Mittelwert derer der beiden Normalschwingungen ist. Immer dann, wenn ein Pendel gerade

 (Seiten 183, 184 und 185: Beihefter und Anzeige)

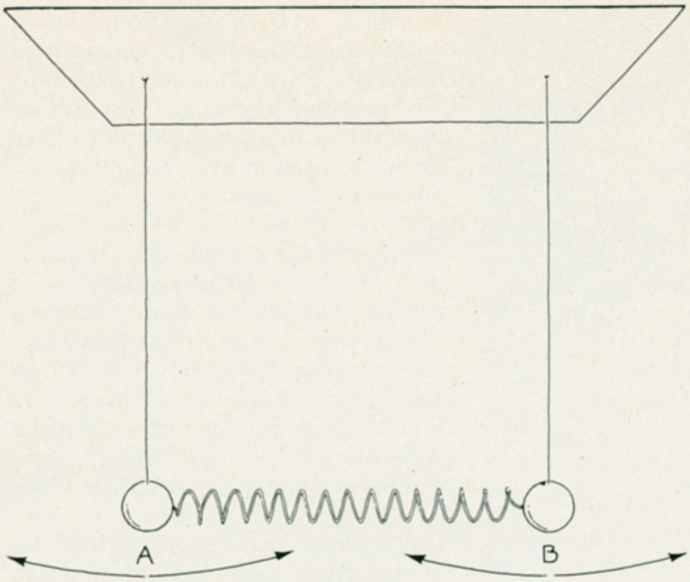

Bild 1: Federkopplung bei Pendeln.

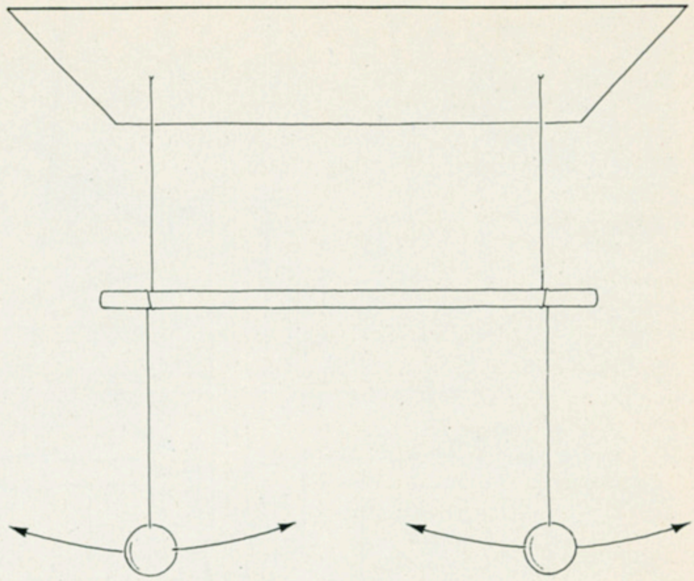

Bild 2: Stabkopplung.

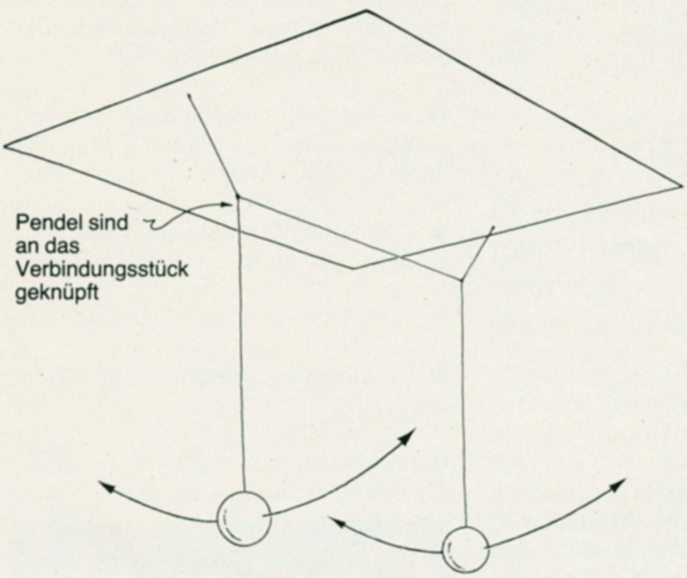

Bild 3: Fadenkopplung.

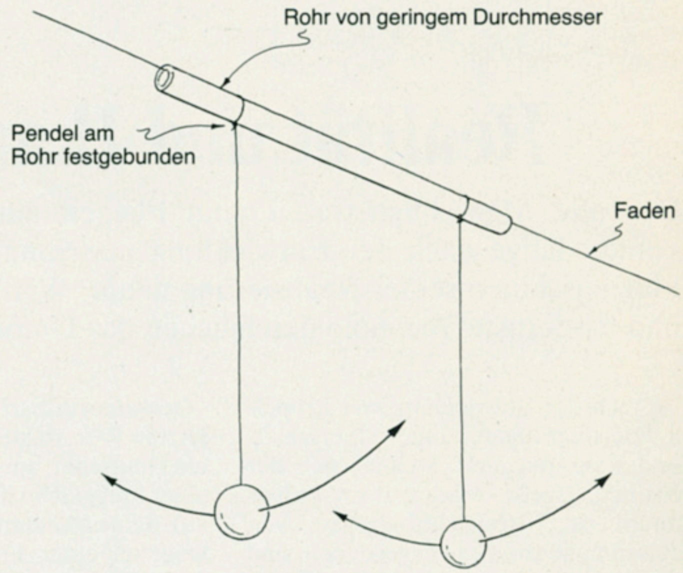

Bild 4: Rohrkopplung.

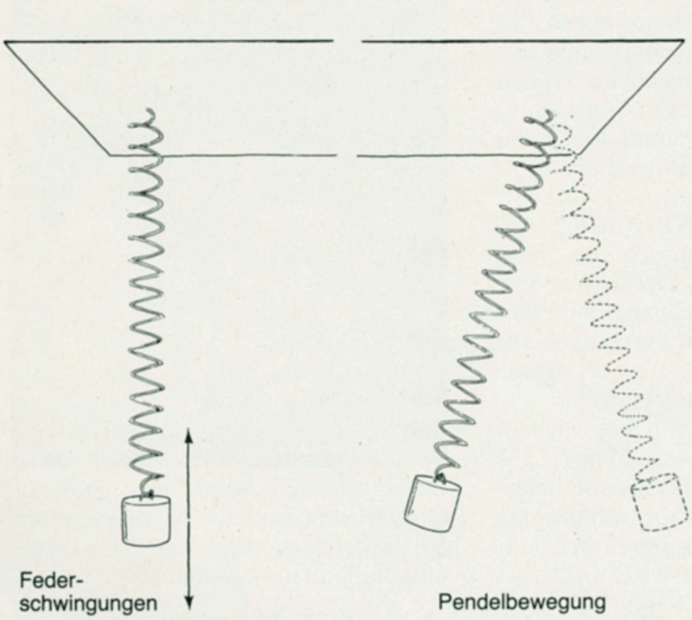

Bild 5: Federpendel.

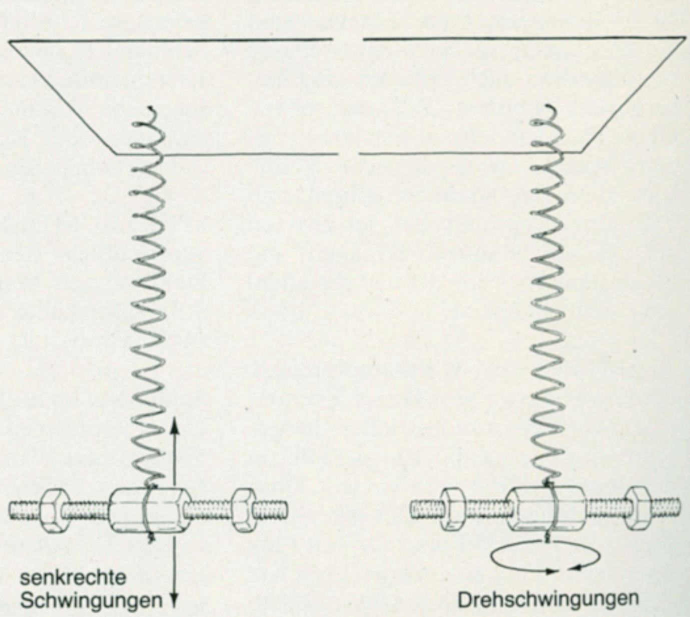

Bild 6: Wilberforce-Pendel.

schwingt, oszilliert es mit dieser Frequenz.

Die andere sinusförmige Änderung betrifft die Schwingungsamplitude. Sie variiert mit einer Frequenz, die gleich der Frequenzdifferenz der beiden Normalschwingungen ist. Damit ist sie viel niedriger als die eigentliche Schwingungsfrequenz der Pendel; eine allmähliche Änderung der Amplitude des einzelnen Pendels ist die Folge. Hat sie ihren größten Wert, so steckt die gesamte Energie des Systems in dem jeweiligen Pendel. Ist sie Null, so ruht das Pendel. Weil die Amplitudenmodulation der beiden Pendel gerade gegenläufig ist, hat das eine seine größte Auslenkung, während das andere stillsteht. Regt man das System auf eine andere Weise an, so können die Pendel anders schwingen, aber die Schwebungen der Amplitude treten nach wie vor auf (Bild 8).

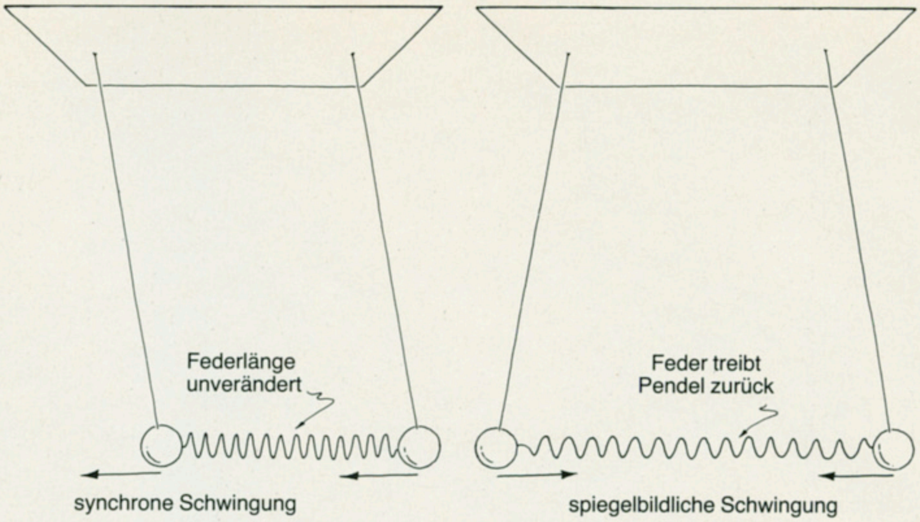

Bild 7: Normalschwingungen eines federgekoppelten Pendels.

Sie haben vielleicht schon einmal hörbare Schwebungen wahrgenommen, wenn Sie zwei Tönen gelauscht haben, die sich nur geringfügig in ihrer Frequenz voneinander unterscheiden. Der Ton, den Sie hören, gehört zu keiner der beiden ihr Ohr erreichenden Schallwellen, sondern entspricht dem Mittelwert der beiden zugehörigen Frequenzen. Seine Amplitude, die mit der wahrgenommenen Lautstärke verknüpft ist, schwankt mit der Differenzfrequenz der beiden Schallwellen. Sie hören also einen Ton, der an- und abschwillt, weil durch die Überlagerung der beiden Schallwellen eine Schwebung entsteht.

Die Anordnung, bei der die beiden Pendel über einen Stab gekoppelt sind, haben Joseph Priest und James Poth von der Miami-Universität in Oxford (US-Bundesstaat Ohio) untersucht. Sie wurden auf dieses System bei einer Vorstellung des Musicals *My Fair Lady* aufmerksam, als einer der Darsteller zufällig gegen ein herabhängendes Kulissenteil stieß. Es war an einem Ende einer waagerechten Stange befestigt; an ihrem anderen Ende hing ein entsprechender Teil herab. Die Stange selbst war an zwei Seilen aufgehängt.

Das stabgekoppelte Pendel

Nach dem Stoß fing die erste Platte an, parallel zur Stange zu pendeln; dann übertrug sich ihre Energie allmählich auf die zweite Platte und anschließend weiter periodisch hin und her – ein Vorgang, der viele Zuschauer merklich von dem Bühnenstück ablenkte. Priest und Poth untersuchten daraufhin ein ähnliches System, bei dem zwei Fadenpendel an einem horizontalen Stab aufgehängt waren. Der Faden jedes Pendels verläuft dabei von dem festen Gestell einmal um den Stab herum zum Pendelgewicht.

Die Bewegungen der Pendel sind durch den Stab miteinander gekoppelt. Läßt man eines der beiden parallel zum Stab schwingen, so wird er in Bewegung versetzt. Dadurch wird auch das zweite Pendel angeregt. Die in dieser Weise gekoppelten Pendel haben wie die mit der Feder verbundenen zwei Normalschwingungen, bei denen kein Energieaustausch zwischen ihnen stattfinden kann (Bild 9). Jede beliebige Bewegung des Systems, die selbst keine Normalschwingung ist, läßt sich wieder als Überlagerung dieser beiden darstellen; wie zuvor gibt es dabei Schwebungen.

Die Normalschwingungen lassen sich wieder aus der Symmetrie des Systems ableiten. Bei der ersten schwingen beide Pendel genau im Gleichtakt. Weil dabei auch der Stab mit hin und her pendelt, entspricht die wirksame Pendellänge der Strecke zwischen dem Gewicht und der Befestigung am festen Gestell, an dem der Stab aufgehängt ist; die ganze Anordnung nimmt synchron an der Pendelbewegung teil. Die zugehörige Schwingungsfrequenz ist wegen dieser großen effektiven Länge gering.

Die andere Normalschwingung entspricht der entgegengesetzten Oszillation der beiden Pendel bei ruhendem Stab. Hier ist die einfache Pendellänge vom Gewicht bis zum stationären Stab wirksam. Die Schwingungsfrequenz ist demnach gleich derjenigen des frei schwingenden Pendels und damit höher als die der anderen Normalschwingung.

Die Kopplung zwischen den beiden Pendeln hat nur einen Einfluß auf Bewegungen parallel zum Stab. Schwingt ein Pendel senkrecht zum Stab, so bleibt diese Bewegung unverändert erhalten, weil der Faden sich nur am Stab etwas auf- und abwickelt, ohne ihn stark zu bewegen. Hat die Schwingung sowohl senkrechte als auch parallele Komponenten in bezug auf den Stab, so bleibt der senkrechte Anteil erhalten, während der parallele Schwebungen erzeugt.

Priest und Poth konnten diese Bewegungsformen sowohl an kleineren Modellen als auch in einem größeren Versuch demonstrieren. Dabei befestigten sie zwei Kinderschaukeln an einer Stange, die an der Decke aufgehängt wurde. In jede Schaukel setzte sich ein Schüler, und eine wurde in Schwung versetzt. Daraufhin verhielten sich die Schaukeln wie Pendel in den kleineren Modellversuchen.

Die Fadenkopplung

Ein ähnliches System, bei dem die Pendel über einen Faden gekoppelt sind und senkrecht dazu schwingen, untersuchte Michael J. Moloney vom Rose-Hulman Institute of Technology in Terre Haute im US-Bundesstaat Indiana. Die Kopplung kommt dadurch zustande, daß die schwingenden Pendel an dem Faden ziehen, der sie verknüpft; er überträgt die Bewegung weiter auf das jeweils andere Pendel. Da beide Pendel außerdem den Faden verdrillen, wird die mathematische Analyse recht schwierig. Moloney minderte deshalb den Einfluß der Verdrillung, indem er die Pendel mindestens zehn Zentimeter voneinander entfernt aufhängte.

Bei der einen Normalschwingung bewegen sich beide Pendel wieder im Gleichtakt, und ihre effektive Länge mißt sich wieder vom Gewicht bis zur starren Befestigung, weil das gesamte System an der Schwingung teilnimmt. Bei der anderen Normalschwingung bewegen sich die Pendel im Gegentakt, so daß ihre wirksame Länge kleiner und die

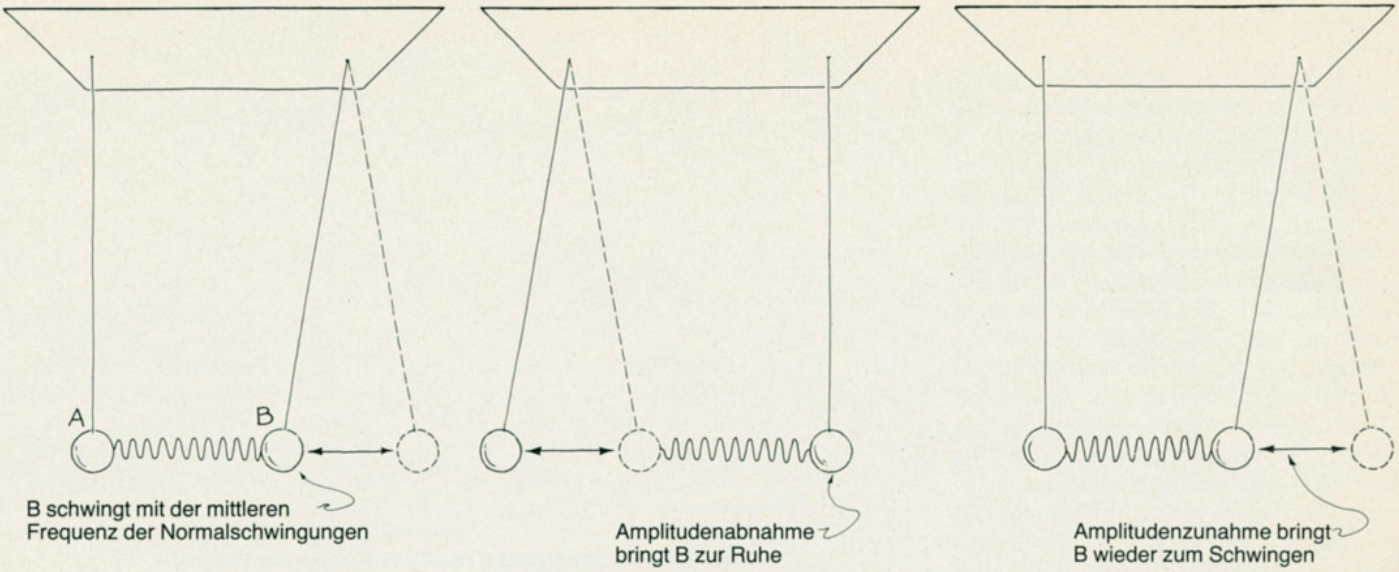

Bild 8: Schwebungserscheinungen.

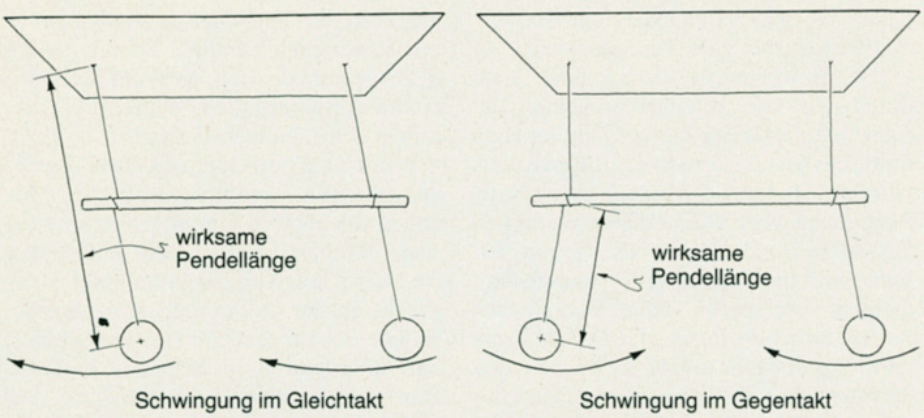

Bild 9: Normalschwingungen des stabgekoppelten Pendels.

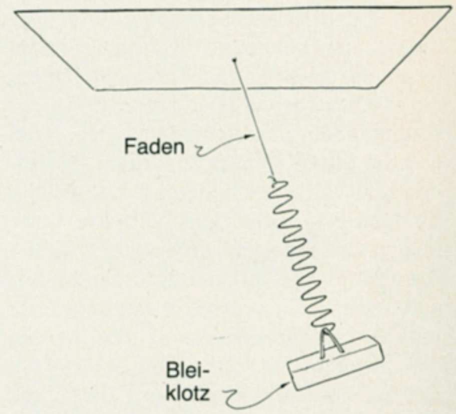

Bild 10: Experiment von Lipham und Pollak.

Schwingungsfrequenz höher ist. Schwingen die Pendel in einer anderen als den beiden Normalmoden, so erscheinen Schwebungen.

Auch das Federpendel ist mit den Systemen verwandt, die ich bis jetzt besprochen habe, weist aber im Gegensatz zu diesen keine Normalschwingungen auf; es ist deshalb mathematisch schwerer zu behandeln. Trotzdem kann man ein derartiges Pendel leicht aufbauen und seine Bewegungen analysieren.

Zieht man das Gewicht nach unten und dehnt dadurch die Feder, so gehen nach dem Loslassen die senkrechten Oszillationen bald in eine Pendelbewegung über. Da die Gesamtenergie des Systems sich nicht mehr verändert, muß die Pendelenergie von der Energie der Federschwingungen kommen. Wenn die gesamte Energie auf diese Weise übertragen worden ist, kehrt sich der Vorgang um, so daß die Feder wieder zu oszillieren beginnt und die Pendelschwingung abebbt.

Dieser zyklische Energieaustausch ist am wirksamsten, wenn die Feder sich unter dem angehängten Gewicht auf etwa vier Drittel ihrer ursprünglichen Länge dehnt. Bei einer derartigen Dehnung erniedrigt sich die Pendelfrequenz derart, daß eine Beziehung zwischen den Frequenzen der reinen Feder- und der reinen Pendelschwingung hergestellt wird. Die Federfrequenz muß doppelt so groß wie die Pendelfrequenz sein, damit die daraus entstehende Instabilität im System groß genug wird, um aus der Schwingung die Pendelbewegung anzuregen.

Martin G. Olsson von der Universität von Wisconsin in Madison hat als einer der ersten ein derartiges Federpendel untersucht. Will man die Feder auf die richtige Länge dehnen, so muß man zunächst verschiedene Gewichte probeweise daranhängen. Nicht alle Federn eignen sich für dieses Experiment. J. G. Lipham und V. L. Pollak von der Universität des US-Bundesstaates North Carolina in Charlotte wiesen darauf hin, daß man auch das Eigengewicht der Feder zusätzlich berücksichtigen muß.

Sie fanden heraus, daß die Feder hart sein muß, wenn man das richtige Frequenzverhältnis erzielen will. Lipham und Pollak bauten ein Pendel mit einer Feder, die eine Masse von 3,4 Gramm und eine Ruhelänge von fünf Zentimetern hatte. Eine Kraft von etwa 0,41 Newton dehnt sie um einen Zentimeter (Bild 10).

Das Gewicht stellten Lipham und Pollak her, indem sie Blei in einem 50-Millimeter-Duranbecherglas schmolzen und abkühlen ließen. Anschließend zerbrachen sie die Gußform. Sie bohrten dann ein Loch durch das Bleigewicht und zogen ein Stück Draht hindurch, mit dem sie es an der Feder befestigten. Schließlich trimmten Lipham und Pollak das Gewicht an der Feder so lange, bis die optimale Masse gefunden war; sie betrug 73 Gramm. (Falls Sie zuviel Blei abgeschnitten haben, können Sie die Feinabstimmung mit Laborgewichten durchführen.)

Die beiden Bastler fanden auch einen Weg, wie man weiche Federn bei dem Versuch verwenden kann. (Die Aufgabe besteht darin, die Frequenz der Pendelschwingung herabzusetzen, ohne daß dadurch die der Federoszillationen verändert wird.) Sie verlängerten das Pendel einfach durch ein Stück Faden zwischen

Feder und Aufhängung. Falls man es schafft, die Feder loszulassen, ohne daß dabei die geringste horizontale Verschiebung auftritt, wird sie nur senkrecht auf und ab schwingen; es entwickelt sich keine Pendelbewegung. In der Praxis wird das Gewicht jedoch immer eine geringfügige Horizontalbewegung machen. Dadurch werden die Schwingungen instabil, und allmählich baut sich die Pendelbewegung auf.

Parametrische Resonanzen

Wenn die Federoszillation noch – wie zu Beginn – dominiert, stellt die Anregung der Pendelbewegung ein Beispiel für eine sogenannte parametrische Resonanz dar. Die Bezeichnung deutet darauf hin, daß die Pendelbewegung von einer Größe abhängt (der Länge des Pendels), die selbst oszilliert. Das Ergebnis ist die Energieübertragung auf die Pendelschwingung. (Ein anderes Beispiel für parametrische Resonanz ist das Anschwingen einer Kinderschaukel. Das periodische Strecken und Einziehen beziehungsweise Aufrichten von Beinen und Rumpf verändert die wirksame Länge des Pendels – also der Schaukel –, so daß Energie in die Schaukelbewegung gepumpt wird.)

Sobald die Pendelschwingung dominiert, fließt Energie über einen einfachen Resonanzmechanismus zurück in die Federschwingung. Dabei wird in einem Rhythmus an der Feder gezogen, der ihrer Eigenfrequenz entspricht; jedesmal, wenn das Gewicht beim Pendeln seine größte Auslenkung erreicht, zieht es an der Feder.

Da so die Feder bei jedem Schwung des Pendels zweimal langgezogen wird, geschieht dies genau im Rhythmus der Eigenfrequenz der Feder, die ja so groß sein soll wie die Schwingungsfrequenz des Pendels. Die Federoszillation kann sich dadurch aufschaukeln und der Pendelbewegung so lange Energie entziehen, bis diese fast aufhört.

Olsson beobachtete den Weg des Gewichts am Ende der Feder beim Aufbau und Abklingen der Pendelschwingung und registrierte manchmal relativ stabile U-förmige oder auch U-förmige Wege. In anderen Fällen ließ sich dagegen kein eindeutiger Weg ausmachen.

Pendelwege und Lissajous-Figuren

Kürzlich untersuchte H. M. Lai von der Chinesischen Universität in Hongkong das Federpendel erneut; er korrigierte und erweiterte dabei die mathematische Analyse. Lai fand heraus, daß

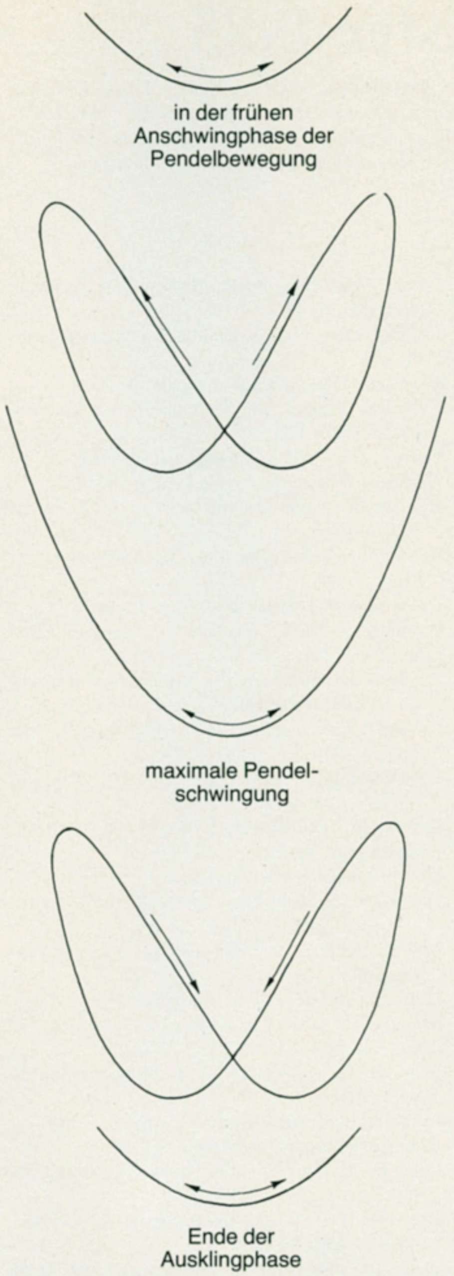

Bild 11: Lissajous-Figuren eines Pendels.

die stabilen Wege Lissajous-Figuren entsprechen (benannt nach dem französischen Physiker Jules-Antoine Lissajous aus dem 19. Jahrhundert). Sie hängen von mehreren Parametern des Systems ab, insbesondere von den relativen Phasen der Feder- und Pendelbewegung.

Der Weg des schwingenden Gewichts über dem Boden kann sich während des An- und Abklingens des Pendels auf verschiedene Weise entwickeln (Bild 11). Er kann U-förmig beginnen, sich anschließend in eine schmetterlingsähnliche Figur verformen, um dann am Maximum der Pendelschwingung wieder die Form eines U anzunehmen. Klingt das Pendeln ab, so entsteht wieder die Schmetterlingsfigur, sie wird aber in umgekehrter Richtung durchlaufen. Auf ähnliche Weise verändert sich der Weg, wenn das Gewicht anfangs der Form eines ∩ folgt.

Das Wilberforce-Pendel ist seit der ursprünglichen Veröffentlichung nur wenig diskutiert worden. Es ist ein weiteres Beispiel für gekoppelte Pendel mit Normalschwingungen und Schwebungen bei komplexeren Bewegungen. Die Normalschwingungen betreffen sowohl die Vertikalbewegung an der Feder als auch die Rotation um die senkrechte Achse.

Über die Verdrillung der Feder sind Translation und Rotation gekoppelt. Dehnt man eine Feder, so dreht sich ihr Ende dabei schraubenförmig. Bei einer der beiden Normalschwingungen haben die Verdrillung (durch die Rotation des Gewichts) und die Schraubendrehung der Feder (durch ihre Vertikalschwingung) den gleichen, bei der anderen entgegengesetzten Drehsinn.

Will man einen optimalen Energietransfer zwischen den beiden gekoppelten Schwingungen erreichen, so müssen die Frequenzen für die reine Drehschwingung und die reine Vertikalschwingung gleich sein. Das läßt sich erreichen, indem man das Gewicht mit Seitenarmen zur Abstimmung der Torsionsfrequenz versieht. Zwei Gewindebolzen mit Mutter, die man seitlich in das Gewicht schraubt, erfüllen diesen Zweck: Schraubt man die Muttern weiter nach innen, so erhöht sich die Torsionsfrequenz; entsprechend niedriger wird sie, wenn man die Muttern etwas weiter herausschraubt. So lassen sich die Frequenzen hinreichend genau abgleichen.

Eine Normalschwingung des Pendels läßt sich anregen, wenn man es nach unten zieht und es dabei gleichzeitig um den entsprechenden Winkel verdrillt. Nach dem Loslassen schwingt das Pendel dann mit gleichbleibenden Amplituden auf und ab und gleichzeitig in einer Drehbewegung vor und zurück; es gibt also keine Energieübertragung zwischen der Translations- und der Rotationsschwingung. Zieht man das Pendel jedoch nach unten, ohne es dabei zu verdrillen, und läßt es dann los, so überlagern sich die Normalschwingungen, und eine Schwebung entsteht. Das Pendel schwingt dann zeitweise auf und ab, ohne sich zu drehen, während es etwas später in der Senkrechten ruht und sich nur vor und zurück dreht.

Das Experimentieren mit schwingungsfähigen Systemen, die Normalschwingungen oder parametrische Resonanzen aufweisen, ist lehrreich im Hinblick auf viele Anwendungen in der Physik. Können Sie weitere Beispiele – gleich welchen Typs – ausfindig machen? Da das Wilberforce-Pendel im Laufe der Jahre in Vergessenheit geraten zu sein scheint, möchten Sie es vielleicht genauer analysieren?