Experiment des Monats

Legt man zwei Bälle aufeinander und läßt sie zusammen aus Hüfthöhe zu Boden fallen, so kann der obere Ball bis zur Decke springen. Wie ist das möglich?

Von Jearl Walker

Fällt ein elastischer Ball auf einen harten Untergrund, so springt er fast wieder bis zu der Höhe, aus der er fallengelassen wurde. Angenommen, man hält einen zweiten, leichteren Ball auf den ersten und läßt beide zusammen fallen: Wie hoch kommen sie dann?

Der schwerere Ball kann fast so hoch wie zuvor allein springen, während der leichtere im Prinzip die neunfache Ausgangshöhe erreichen kann! Sicherlich springt der leichtere Ball in den meisten Fällen nicht so hoch, aber sein Rückprall ist oft so stark, daß jeder bei diesem Versuch eine Sicherheitsbrille tragen und dem Ball nicht in die Quere kommen sollte.

Eine erstaunliche Abwandlung des Zwei-Bälle-Versuchs hat kürzlich Joseph L. Spradley vom Wheaton-College in Wheaton (US-Bundesstaat Illinois) veröffentlicht. Der Versuch geht so: Man hält einen Schlagball über einen Basketball (am besten mit einem kleinen Zwischenraum) und läßt beide zugleich aus Hüfthöhe fallen (Bild 1). Der Basketball bleibt fast wie angeklebt auf dem Boden liegen; der Schlagball springt bis an die Decke. Bei diesem Versuch sind Sicherheitsmaßnahmen unerläßlich. Als ich die Bälle einmal nicht genau aufeinandergelegt hatte, schlug der kleine mir einen blauen Fleck, weil er seitwärts abprallte.

Nimmt man anstelle des Schlagballs eine Kugel aus elastischem Kunststoff – jedem Kind als Flummi bekannt –, so springt der Basketball etwas höher, und der Flummi knallt regelrecht gegen die Decke. Noch spektakulärer ist das Spiel mit einem Stapel aus drei Bällen, deren Masse nach oben abnimmt. Im Idealfall würde der oberste Ball bis in die 49fache Ausgangshöhe prallen; in der Praxis ist die Endhöhe geringer, aber noch immer imponierend.

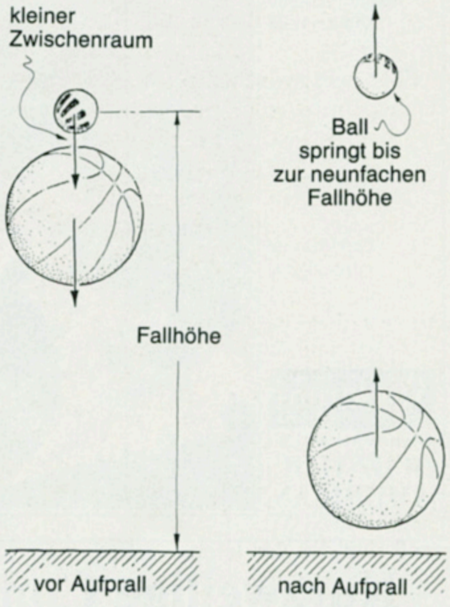

Bild 1: Wie zwei Bälle springen können.

Wenn ein Stapel aus Bällen den Boden erreicht, findet eine Kette von Zusammenstößen statt; dabei wird Bewegungsenergie aufwärts durch den Stapel übertragen. Der letzte Stoß dreht die Bewegungsrichtung des oberen Balles um und erhöht seine Geschwindigkeit.

Die Höhe, die er dann erreicht, hängt vom Quadrat seiner Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß ab. Besteht der Stapel aus nur zwei Bällen, kann der Stoß die Geschwindigkeit des oberen Balles günstigstenfalls verdreifachen und ihn in die neunfache Ausgangshöhe befördern. Bei einem Stapel aus drei Bällen kann der Stoß die Geschwindigkeit des obersten Balles höchstens versiebenfachen, so daß er 49mal so hoch wie seine anfängliche Höhe springt.

Man könnte meinen, die Sprunghöhe wäre am größten, wenn der unterste Ball seine gesamte Bewegungsenergie auf den obersten übertragen würde; doch das ist nicht der Fall. Wie wir sehen werden, ereignen sich die höchsten Sprünge, wenn nur ein Bruchteil der Energie des untersten Balls auf den obersten übergeht.

Wie wird eigentlich die Energie zwischen den Bällen übertragen? Am besten, wir betrachten einfache Stöße. Angenommen, ein Ball bewegt sich nach rechts und stößt mit einem zweiten zusammen, der ruht (wir vernachlässigen alle äußeren Kräfte, etwa die Reibung auf der Rollfläche). Wenn die Bälle genau frontal zusammenstoßen, wird die Bewegungsenergie des ersten Balls ganz oder teilweise auf den zweiten übertragen, und dieser bewegt sich nach rechts. Je nach den Eigenschaften des Stoßes kann der erste Ball sich nach rechts oder links bewegen oder gar zur Ruhe kommen. Die Frage ist: Wieviel Energie wird dabei übertragen, und welche Geschwindigkeit bekommt der zweite Ball?

Elastizität und Energieübertrag

Im Jahre 1968 berichteten John B. Hart und Robert B. Herrmann, damals an der Xavier-Universität in Cincinnatti (Ohio), über theoretische Untersuchungen solcher Stöße. Sie experimentierten auch mit Stahlkugeln verschiedener Größe, die an Schnüren von einer Stange hingen. Um die Energieübertragung beim Stoß zu untersuchen, wurden mehrere Kugeln so aufgereiht, daß kleine Zwischenräume blieben (Bild 2 links). Sie hoben beispielsweise die äußerste Kugel an, ließen sie los und beobachteten, wie die Folge von Stößen Energie ans andere Ende übertrug.

Die Ausgangsenergie der ersten Kugel wurde durch die Höhe festgelegt, aus der man sie losließ. Als Maß für die auf die letzte Kugel übertragene Energie diente die Höhe, bis zu der diese schließlich schwang. In dieser Versuchsanordnung verhielten sich die Kugeln übrigens wie in einem fast vollkommen kräftefreien System.

Hier will ich nur die theoretischen Erkenntnisse von Hart und Herrmann darstellen; jeder kann aber die Ergebnisse mit ihrer Pendelmaschine nachprüfen. Wenn, wie oben beschrieben, eine Kugel auf eine zweite, ruhende trifft, sind zwei Größen von Bedeutung: Impuls und Bewegungsenergie. Der Impuls ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit; die Bewegungsenergie ist die Hälfte des Produktes aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit. Da die Kugeln ein kräftefreies System bilden, können zwar ihre Impulse bei einem Stoß ausgetauscht werden, aber der Gesamtimpuls muß erhalten bleiben.

Ein so einfacher Erhaltungssatz gilt für die Bewegungsenergie praktisch nie: Sie nimmt ab, da sie teilweise in Schall sowie in Schwingungen oder Verformungen der Kugeln umgewandelt wird. Ohne solche Verluste von Bewegungsenergie wäre der Stoß vollkommen elastisch. Gewöhnliche Stöße sind aber niemals so perfekt und heißen darum inelastisch. Beispielsweise kann man einen Stoß fast immer hören; also muß ein Teil der Energie sich in Schall verwandelt haben.

Wie groß die Elastizität ist, läßt sich durch den sogenannten Rückbildungskoeffizienten ausdrücken. Da eine rein elastische Deformation sich vollständig rückbildet, hat der Koeffizient für einen vollkommen elastischen Stoß genau den Wert eins, für einen vollkommen inelastischen Stoß den Wert null. Ein Stoß von Stahlkugeln zum Beispiel kann einen Wert bis zu 0,99 haben; für den Stoß zwischen einem Schlagball und einem Basketball ist der Koeffizient kleiner. Obwohl ein höherer Wert bedeutet, daß mehr Energie auf die zweite Kugel übertragen wird, ist dies keine Garantie dafür, daß die zweite Kugel tatsächlich viel Energie gewinnt. Selbst wenn fast die gesamte Bewegungsenergie beim Stoß erhalten bleibt, gibt die erste Kugel manchmal nur widerwillig Energie an die zweite ab.

Wieviel Energie übertragen wird, hängt nämlich nicht nur von der Elastizität ab, sondern auch vom Verhältnis zwischen den Massen der ersten und der zweiten Kugel. Gehen wir zu dem Beispiel zurück, bei dem eine Kugel auf eine ruhende zweite trifft. Ist das Massenverhältnis eins und der Stoß vollkommen elastisch, wird die gesamte Energie der ersten Kugel auf die zweite übertragen; die erste Kugel bleibt auf der Stelle liegen (Bild 2 rechts). Bei jedem anderen Massenverhältnis, sei es größer oder kleiner, wird weniger Energie übertragen. Ist beispielsweise die Masse der ersten Kugel hundertmal so groß wie die der zweiten, werden nur etwa 4 Prozent Energie übertragen.

Überraschenderweise zeigt die Gleichung für den Energieübertrag folgende Symmetrie: Bei vorgegebenem Massenverhältnis spielt es keine Rolle, welche Kugel sich anfangs bewegt; wenn die Rollen vertauscht werden und die leichtere Kugel auf eine ruhende schwerere trifft, wird derselbe Energieanteil übertragen. Beidemal ist der Übertrag gering, weil die Massen zu unterschiedlich sind; je unterschiedlicher die Massen, desto schlechter der Übertrag.

Energieübertrag über mehrere Kugeln

Fügt man zwischen die beiden höchst ungleichen Kugeln eine dritte mit mittelgroßer Masse ein, verbessert sich der Übertrag. Jetzt gibt es eine Folge von zwei Stößen, und bei jedem sind die beteiligten Massen einander ähnlicher als beim ursprünglichen einfachen Stoß. Hart und Herrmann fanden heraus, daß der Übertrag am besten ist, wenn die Masse der mittleren Kugel gleich dem geometrischen Mittel der beiden anderen Massen ist, das heißt gleich der Quadratwurzel des Produkts dieser Massen.

In meinem Beispiel müßte also die Masse der mittleren Kugel zehnmal so groß wie die der leichteren sein; dann steigt der Energieübertrag auf etwa 11 Prozent. Wegen der Symmetrie der Übertragsgleichung spielt es keine Rolle, ob die Stoßfolge mit der schwersten oder der leichtesten Kugel beginnt.

Außer dem Grad der Stoßelastizität beeinflussen nur noch die Massenverhältnisse den Energieübertrag. Er kann sich verbessern, wenn noch mehr Kugeln mit mittleren Massen in die Folge eingefügt werden. Wie Hart und Herrmann herausfanden, ist der Übertrag am besten, wenn die Massenverhältnisse aufeinanderfolgender Kugeln jeweils gleich sind – die Masse jeder Zwischenkugel sollte also gleich dem geometrischen Mittel der Massen der beiden Nachbarkugeln sein.

Ist etwa das Massenverhältnis der ersten beiden Kugeln 1,05, dann sollte auch das Verhältnis der zweiten zur dritten Kugelmasse 1,05 betragen und so weiter. Dies ist ungefähr der richtige Wert, wenn hundert Kugeln zwischen zwei Kugeln mit dem Massenverhältnis hundert eingefügt werden. Die erste und schwerste Kugel trifft auf eine Kugel, die nur geringfügig weniger Masse hat, und übergibt dabei nahezu ihre gesamte Energie. Die zweite Kugel stößt dann auf die dritte, die wiederum kaum weniger Masse hat, und wiederum ist der Übertrag fast vollständig. Wenn die letzte Kugel angestoßen wird, erhält sie nahezu 95 Prozent der anfänglichen Energie. Noch immer herrscht Symmetrie: Auch bei umgekehrter Stoßrichtung pflanzt sich derselbe Prozentsatz an Energie durch die Kugelreihe fort.

Werden noch mehr Kugeln eingefügt und die Massen so gewählt, daß das Massenverhältnis zwischen jeweils aufeinanderfolgenden Kugeln in der ganzen Folge gleich bleibt, nähert sich der Übertrag dem Wert von 100 Prozent. Denn je länger die Kette wird, um so mehr nähern die Massen jedes Stoßpaars sich dem Idealfall genau gleicher Massen, und dabei würde ja die gesamte Energie übertragen. Hängen die Kugeln wie eng benachbarte Pendel, so wird durch das Loslassen der Kugel am einen Ende Energie durch die Kette geschickt, bis schließlich die letzte Kugel aufwärtsschwingt. Während der Stoßfolge bewegen sich die mittleren Kugeln kaum, und die Energieübertragung

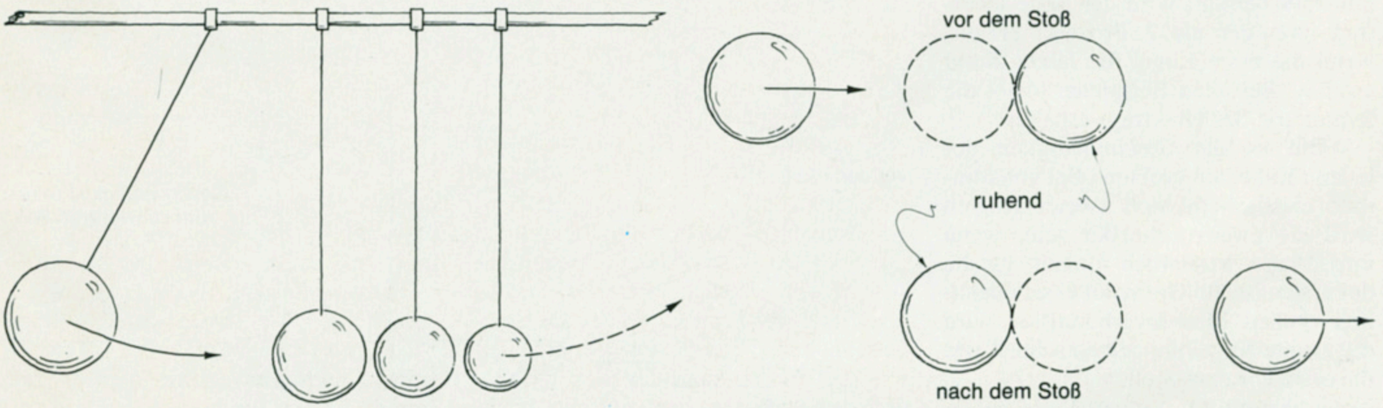

Bild 2: Eine Pendelmaschine für Stoßuntersuchungen (links) und ein Stoß zwischen gleichgroßen Massen.

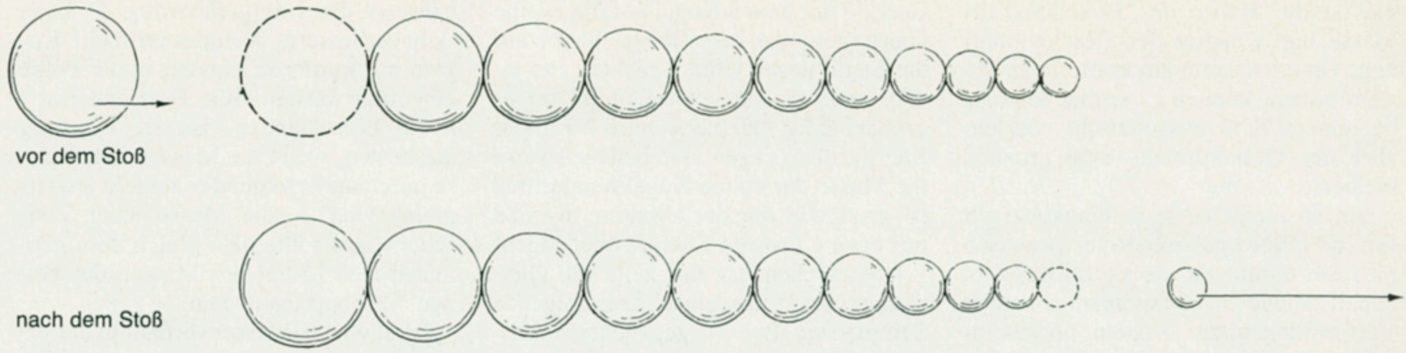

Bild 3: Stoßfolgen.

ist, abgesehen vom Klacken, das durch die Kugelreihe läuft, nicht wahrnehmbar (Bild 3).

Nichtelastische Stöße

Bis hierher wurden die Stöße als vollkommen elastisch betrachtet. Aber in Wirklichkeit sind die meisten Stöße inelastisch. Ist der Rückbildungskoeffizient kleiner als sein Idealwert eins, so verschlechtert sich der Energieübertrag, wenn die Kugelkette zu lang ist.

Hart und Herrmann berechneten, wieviele Zwischenkugeln erforderlich sind, um den Energieübertrag auf die letzte Kugel so groß wie möglich zu machen, wenn der Rückbildungskoeffizient und das Massenverhältnis der Endkugeln vorgegeben sind. Sind weniger Kugeln als optimal in der Reihe, nimmt der Übertrag wegen der größeren Massenunterschiede zwischen den Kugeln ab; sind es mehr, wird der Übertrag durch die Inelastizität der Stöße vermindert.

Angenommen, das Massenverhältnis der Endkugeln ist wiederum hundert, der Rückbildungskoeffizient jedoch 0,99 – so daß also immer noch fast perfekte Elastizität gegeben ist. Der größte Übertrag findet dann bei 22 Zwischenkugeln statt. Für einen Koeffizienten von 0,8 sollten nur vier Zwischenbälle vorhanden sein. Und wenn die Stoßzahl nur 0,19 beträgt, wird der beste Übertrag (weniger als 2 Prozent) erzielt, wenn die erste Kugel die letzte direkt anstößt. Bei allen Beispielen bleibt die Symmetrie des Übertrags erhalten.

Wann ist die Geschwindigkeit der letzten Kugel am größten? Bei vollkommen elastischem Stoß zweier Kugeln wird die zweite schneller sein, wenn ihre Masse wesentlich kleiner als die der ersten ist. Im Grenzfall eines unendlich großen Massenverhältnisses wird die zweite Kugel doppelt so schnell wie die erste vor dem Stoß.

Bei diesem Massenverhältnis ist jedoch der Energieübertrag winzig. Dieses Ergebnis scheint paradox zu sein: Wie kann die zweite Kugel ihre größte Geschwindigkeit erhalten, wenn sie nur eine winzige Energiemenge gewinnt? Die Antwort ergibt sich aus ihrer geringen Masse. Schon wenn sie nur eine kleine Energiemenge mitbekommt, wird ihre Geschwindigkeit groß.

Die Geschwindigkeit der zweiten Kugel läßt sich übrigens ganz ohne das Lösen von Gleichungen herleiten. Wenn das Massenverhältnis sehr groß ist, ändert sich die Geschwindigkeit v der ersten Kugel beim Stoß kaum. Aus der Sicht der ersten Kugel scheint sich die zweite (in Wirklichkeit stillstehende) Kugel vor dem Stoß der ersten mit einer Geschwindigkeit v zu nähern (Bild 4). Ist der Stoß vollkommen elastisch, scheint die zweite Kugel mit der Geschwindigkeit v zurückzuprallen. Da die erste Kugel noch immer eine Geschwindigkeit von annähernd v hat, ist die tatsächliche Geschwindigkeit der zweiten Kugel $2v$.

Im Jahre 1972 berichtete James D. Kerwin von der Polytechnischen Staatsuniversität von Kalifornien in Pomona über Berechnungen einer Stoßfolge, bei der jeder Stoß vollkommen elastisch ist und zwischen einer massereichen und einer unendlich leichten Kugel erfolgt. Die Geschwindigkeit verdoppelt sich mit jedem Stoß; die letzte Kugel hat bei n Zwischenkugeln die 2^n-fache Geschwindigkeit der ersten – offensichtlich kann eine lange Kette eine phantastische Endgeschwindigkeit ergeben.

Aus diesen Beispielen von Stoßfolgen läßt sich folgendes lernen: Das Maß des Energieübertrags hängt von Elastizität und Massenverhältnissen ab; wenn die Massen richtig gewählt werden, kann auf den letzten und leichtesten Gegenstand viel Energie oder eine große Geschwindigkeit übertragen werden, aber beide Endergebnisse erfordern unterschiedliche Massenverhältnisse.

Fallende Ballstapel

Diese Erkenntnisse gelten auch für Stoßfolgen, bei denen ein Stapel von Bällen zu Boden fällt. Der unterste Ball prallt vom Boden ab, stößt auf den nächsthöheren - und so weiter, bis der oberste Ball erreicht ist. Bei jedem Stoß der Folge hängen der Energie- und der Geschwindigkeitsübertrag nach oben von der Elastizität und den Massenverhältnissen ab.

Das hohe Zurückprallen eines Balls von einem fallengelassenen Stapel von Bällen hat zuerst Walter Roy Mellen im Jahre 1968 beschrieben, kurz nachdem die Wham-O Manufacturing Company ihren hochelastischen Superball auf den Markt gebracht hatte. Mellen legte einen kleinen Superball auf einen größeren und ließ beide fallen. Er erzielte sogar einen noch stärkeren Rückprall,

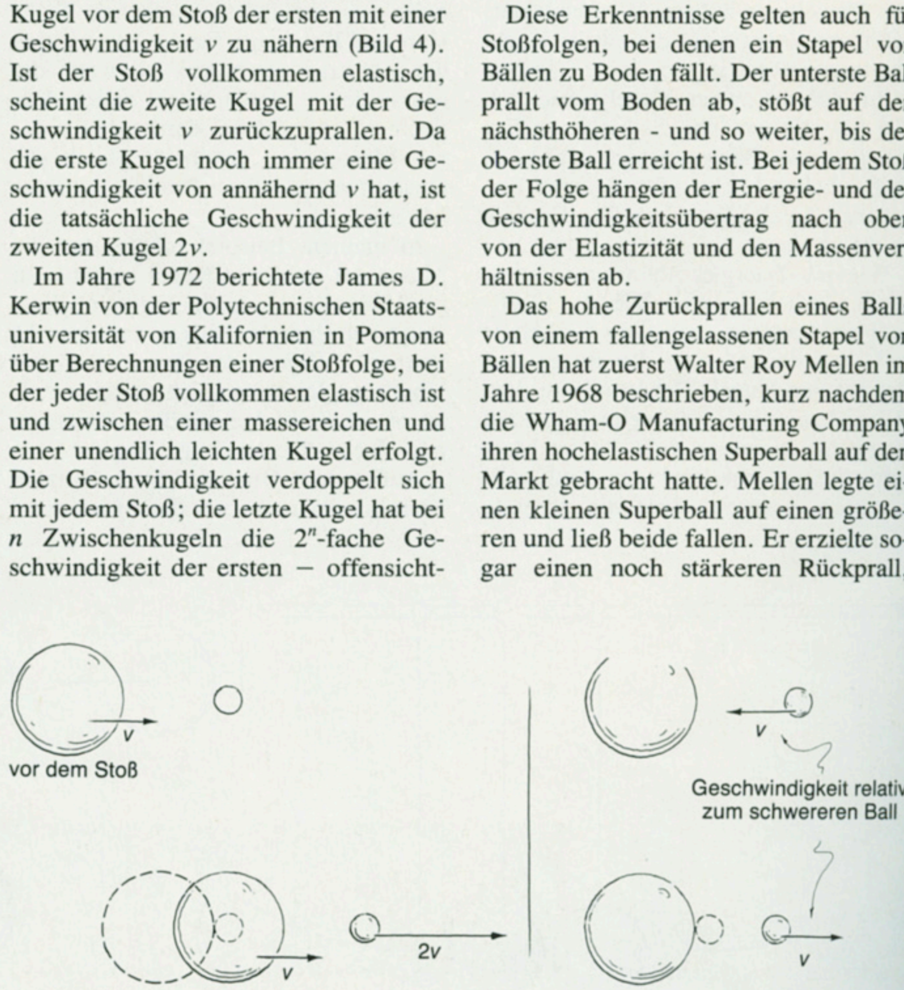

Bild 4: Stoß zwischen einem schweren und einem leichten Ball.

wenn er auf den kleineren Superball einen Tischtennisball legte (obwohl ein Tischtennisball größer als ein kleiner Superball ist, ist er leichter – und in diesem Fall zählt nur das Massenverhältnis). Normalerweise springt der Tischtennisball ungefähr in die 20fache Ausgangshöhe.

Gerhard Stroink von der Dalhousie-Universität in Halifax (Hauptstadt der kanadischen Provinz Neu-Schottland) sowie mehrere andere Autoren haben ein einfaches Verfahren vorgeschlagen, die Vorgänge beim Fall der Bälle zu veranschaulichen. Man nimmt zunächst zwei Bälle, wobei der obere wesentlich leichter ist als der untere. Angenommen, die Stöße zwischen Ball und Boden und zwischen den Bällen sind vollkommen elastisch. Wenn v die Geschwindigkeit der Bälle vor dem Aufprall des unteren Balls auf den Boden ist, so springt dieser unmittelbar nachher mit der Geschwindigkeit v nach oben gegen den oberen Ball, der weiterhin mit der Geschwindigkeit v nach unten fällt (Bild 5). Die Bälle nähern sich einander also mit $2v$, der Summe ihrer Geschwindigkeiten.

Im Bezugssystem des unteren Balls nähert sich ihm der zweite Ball mit der Geschwindigkeit $2v$, prallt von ihm ab und springt mit der Geschwindigkeit $2v$ aufwärts. Wegen des großen Massenverhältnisses bewegt der untere Ball sich relativ zum Boden weiterhin fast mit der Geschwindigkeit v nach oben. Vom Boden aus gesehen muß daher der obere Ball eine Geschwindigkeit von fast $v + 2v$ oder $3v$ haben. Nun hängt, wie gesagt, die Höhe, die ein Ball erreicht, vom Quadrat seiner Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß ab. In diesem Fall verdreifacht sich die Geschwindigkeit des zweiten Balls durch den Stoß – mithin springt er zur neunfachen Ausgangshöhe.

Was geschieht, wenn ein dritter, noch leichterer Ball auf den Stapel gelegt wird? Kurz bevor der zweite Ball mit dem dritten zusammenstößt, bewegt sich der zweite Ball mit der Geschwindigkeit $3v$ aufwärts, während der dritte mit der Geschwindigkeit v fällt. Die Bälle stoßen mit einer Gesamtgeschwindigkeit von $v + 3v$ oder $4v$ zusammen. Nach dem Stoß bewegt sich der dritte Ball relativ zum zweiten Ball mit der Geschwindigkeit $4v$ nach oben. Da der zweite Ball eine Geschwindigkeit von $3v$ relativ zum Boden hat, muß der dritte Ball relativ zum Boden eine Geschwindigkeit von $3v + 4v$ oder $7v$ haben. Im Idealfall unendlicher Massenverhältnisse und vollkommen elastischer Stöße müßte der dritte Ball also tatsächlich bis zum 49fachen seiner Anfangshöhe springen. Man kann diese

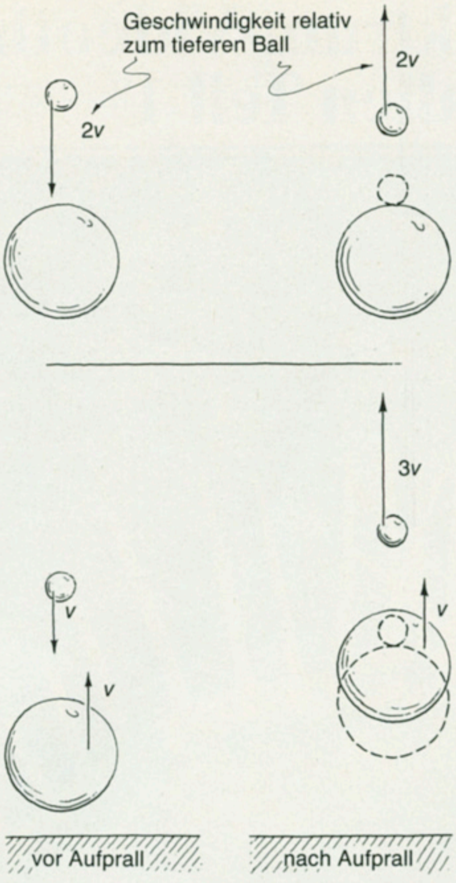

Bild 5: Zwei fallengelassene Bälle.

Betrachtung auf Stapel von vier oder mehr Bällen ausdehnen.

Noch einmal zurück zu dem Beispiel, daß nur zwei Bälle fallen und die Stöße vollkommen elastisch sind. Will man vollständigen Energieübertrag zwischen den Bällen erreichen, so daß der untere Ball beim Stoß liegenbleibt, muß das Massenverhältnis genau drei sein. In diesem Fall erreicht der obere Ball die vierfache Ausgangshöhe. Auch wenn die Sprunghöhe nicht so beeindruckend ist wie bei einem wesentlich größeren Massenverhältnis, wirkt der Versuch immer noch überraschend: Man hat zwei Bälle, die jeder für sich gut springen; wenn man sie jedoch zusammen fallen läßt, scheint der untere kaum mehr hochzukommen, während der obere viel höher schießt, als es jeder der beiden allein könnte – sogar höher als die Summe der Einzelsprünge.

Bei weniger elastischen Stößen ist das beste Verhältnis für einen vollständigen Energieübertrag etwas höher. Spradley berechnete, daß ein vollständiger Energieübertrag bei einem Rückbildungskoeffizienten von mindestens 0,62 möglich ist. Für einen Wert von 0,9 ist das beste Massenverhältnis 3,01; liegt er dagegen bei nur 0,62, dann ist das beste Massenverhältnis 3,24.

Ein Basketball und ein Schlagball haben ein Massenverhältnis von etwa vier. Wenn man sie auf die von Spradley empfohlene Weise fallen läßt, erhält der Schlagball nahezu die gesamte Energie des Basketballs und springt mittelhoch; der Basketball springt kaum. Ein Basketball und ein Flummi haben ein Massenverhältnis von etwa 28. Da das Massenverhältnis so viel größer ist als im Falle des Schlagballs, bekommt der Flummi wahrscheinlich viel weniger Energie vom Basketball als der Schlagball. Dennoch hebt er wie eine Rakete ab und springt höher als der Schlagball. (Natürlich ist auch die Elastizität in beiden Versuchen unterschiedlich.)

Wenn man drei Bälle fallen läßt und die Stöße vollkommen elastisch sind, wie groß müßte dann das Massenverhältnis zwischen dem zweiten und dritten Ball für einen vollständigen Übertrag sein? Läßt sich die Untersuchung auf noch mehr Bälle erweitern? Wenn das Massenverhältnis zwischen dem untersten und dem obersten Ball in einem großen Stapel gegeben ist, kann man dann ausrechnen, welche Massen die Zwischenbälle haben müßten, um den bestmöglichen Energieübertrag zu erreichen? Ich glaube nicht, daß irgend jemand dafür schon eine Antwort ausgearbeitet hat.

Manchmal stelle ich fest, daß bestimmte Bälle nicht so springen, wie ich es erwartet habe. Zum Beispiel sollte ein sehr kleiner Superball ziemlich hoch springen, wenn er mit einem Basketball fallengelassen wird, tut es aber oft nicht. Warum?

Im Jahre 1986 haben D. Rae Carpenter jr., David J. Rehbein und Robert J. Bonometti, damals alle an der Militärakademie der Vereinigten Staaten in West Point (Bundesstaat New York), einen geschickten Weg ausgedacht, wie man das Experiment mit zwei aufeinandergestapelten Bällen durchführen kann: Sie nahmen eine leichte Plastikkugel aus einem Deo-Stift und eine ähnlich große, aber viel schwerere Stahlkugel, steckten sie in eine lange Plastikröhre und hielten sie mit einer durch die Röhrenwand gesteckten Büroklammer. Dann stellten sie die Röhre senkrecht und zogen die Büroklammer heraus, so daß die Kugeln übereinanderliegend herabfielen. Auf der gesamten Länge der Röhre waren Löcher gebohrt, so daß die Luft beim Fall der Kugeln leicht entweichen konnte. Die Röhre stand auf einem harten Kachelboden. Das Massenverhältnis der Kugeln war etwa neun, und die Rückbildungskoeffizienten zwischen Kugeln und Boden sowie unter den Kugeln waren hoch. Gewöhnlich schoß der Plastikball bei diesem eher zivilen ballistischen Experiment in die vier- oder fünffache Ausgangshöhe.