Tipp 2:

Wie ich die Mondentfernung bestimme

VON MARTIN FEDERSPIEL

Mondfinsternisse eignen sich besonders gut dazu, eines der wichtigsten Verfahren der kosmischen Entfernungsbestimmung nachzuvollziehen: Misst man von zwei weit auseinanderliegenden Orten auf der Erde gleichzeitig die Position des verfinsterten Mondes, lässt sich seine Entfernung überraschend genau ermitteln.

Die Mondbahn und die Entfernung des Mondes sind heute mit einer großen Genauigkeit bekannt. Aus der Laufzeit, die ein Lasersignal von der Erde zum Mond und zurück benötigt, lässt sich die Mondentfernung auf wenige Zentimeter genau bestimmen. Bei diesem als Lunar Laser Ranging (LLR) bezeichneten Verfahren nutzen die Astronomen Reflektoren, welche die Astronauten der Apollo-Missionen sowie die unbemannten sowjetischen Raumsonden Lunochod 1 und 2 zum Mond brachten. Doch auch mit einfachen Mitteln, wie sie in einer Schule zur Verfügung stehen, lässt sich die Entfernung des Mondes mit einer relativ hohen Genauigkeit ableiten. Mit Hilfe einer Parallaxenmessung gelingt die Entfernungsbestimmung bis auf wenige Prozent genau.

Das Prinzip der Parallaxenmessung ist einfach und altbekannt: Ein Gegenstand in der Nähe scheint in Bezug auf einen weiter entfernten Hintergrund in verschiedenen Richtungen zu stehen, wenn man ihn von unterschiedlichen Beobachtungspunkten aus anvisiert. Beispielsweise scheint der Daumen einer Hand vor einem Hintergrund hin und her zu springen, wenn man ihn abwechselnd mit dem rechten und linken Auge betrachtet – dies umso mehr, je näher der Daumen den Augen des Betrachters ist. Auf den Mond bezogen heißt das: Der relativ nahe Erdtrabant erscheint vor dem als unendlich weit entfernt anzunehmenden Sternenhintergrund um einen Parallaxenwinkel π verschoben, wenn man ihn von verschiedenen Punkten der Erdoberfläche aus anvisiert (Abb. 2).

In der Praxis ergibt sich bei der Messung der Mondparallaxe die Schwierigkeit, dass der Mond die meisten Hintergrundsterne bei weitem überstrahlt. Um den Mond und die Hintergrundsterne gleichzeitig vermessen zu können, muss man also einen Zeitpunkt abwarten, bei dem der Mond entweder hellen Objekten, wie zum Beispiel den Plejaden, begegnet oder die totale Phase einer Mondfinsternis nutzen, wenn die Helligkeit des Erdtrabanten stark reduziert ist.

Datenmaterial

Zur Bestimmung der Parallaxe dienen Fotografien des total verfinsterten Mondes. Diese Bilder müssen mehrere Anforderungen erfüllen. Grundsätzlich darf der Mond auf den Aufnahmen nicht zu klein erscheinen. Zudem müssen die Bilder mindestens zwei Sterne zeigen, die den Mond umrahmen. Aus diesen Kriterien ergibt sich eine geeignete Aufnahmebrennweite in der Größenordnung

Abb. 1: Betrachtet man den Mond gleichzeitig von zwei verschiedenen Orten auf der Erde, so sehen ihn die Beobachter an unterschiedlichen Positionen. Das Bild zeigt die Überlagerung zweier Aufnahmen, die während der totalen Mondfinsternis am 3./4. März 2007 zeitgleich in Freiburg im Breisgau und in Norditalien nahe Turin entstanden.

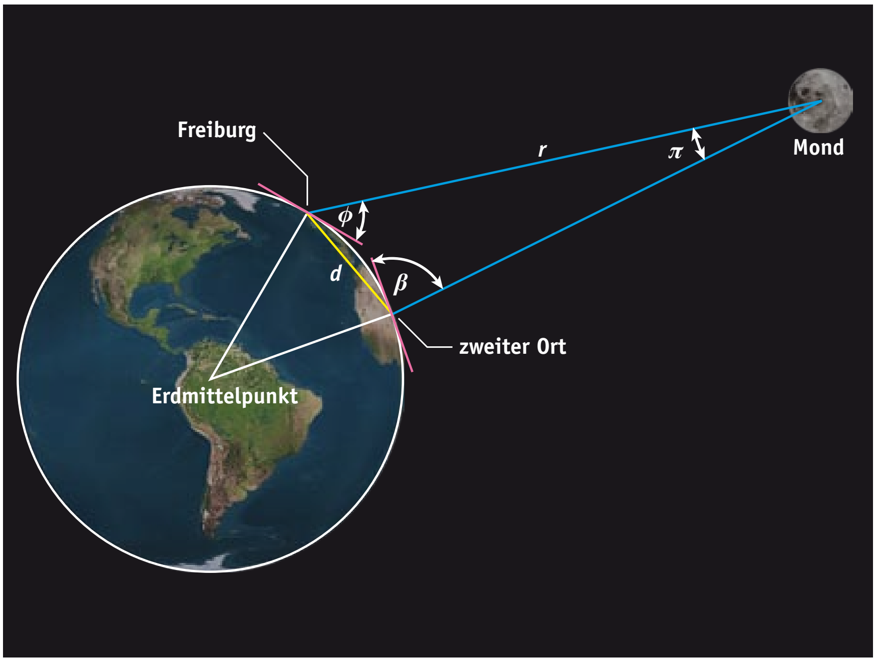


Abb. 2: Die Entfernung r des Mondes lässt sich aus der von zwei verschiedenen Beobachtungsorten auf der Erde gemessenen Winkelverschiebung π berechnen. Um r bestimmen zu können, muss zusätzlich die Entfernung d der Beobachtungsorte und ein weiterer Winkel im Dreieck bekannt sein.

Martin Federspiel, Simone Bolzoni

von tausend Millimetern. Des Weiteren müssen die Bilder möglichst scharf und kurz belichtet sein, was eine Nachführung der Aufnahmeoptik erfordert.

Außerdem müssen die Bilder an den beiden Beobachtungsorten möglichst genau gleichzeitig aufgenommen worden sein. Da sich der Mond mit einer relativ großen scheinbaren Winkelgeschwindigkeit von etwa 0,5 Bogensekunden pro Sekunde unter den Sternen bewegt, wirken sich bereits Zeitdifferenzen im Sekundenbereich unangenehm als Fehler von π aus.

Die totale Mondfinsternis vom 3./4. März 2007 bot eine gute Gelegenheit, die Mondparallaxe zu messen. Bei guten Wetterbedingungen erstellte der Autor von Freiburg im Breisgau aus Aufnahmen des verfinsterten Mondes, die auch die Hintergrundsterne 56 und 59 Leonis zeigen. Da schlechtes Wetter am zweiten vorgesehenen Beobachtungsort Mainz keine Aufnahmen zuließ, mussten Daten von einem anderen Beobachtungsort beschafft werden.

Nach der Finsternis erschien auf der Internetseite der Zeitschrift Sky and Telescope ein Bild von Simone Bolzoni, das er im norditalienischen Avigliana bei Turin aufgenommen hatte. Es zeigt den verfinsterten Mond und ebenfalls die beiden Hintergrundsterne 56 und 59 Leonis. Auf Anfrage überließ mir Bolzoni seine gesamte Aufnahmeserie. Es stellte sich heraus, dass er drei Bilder genau zur gleichen Zeit aufgenommen hatte wie ich und dass diese sich für die Messung der Parallaxe eigneten. Von dem Sternfreund Karl-Ludwig Bath erhielt ich eine weitere nützliche Aufnahme, die George Liakos in Rustenburg bei Johannesburg in Südafrika belichtet hatte.

Parallaxenbestimmung mit der Basislinie Freiburg – Avigliana

Die folgenden Ausführungen beziehen sich nur auf das am 3. März um 23:50:00 Uhr UT von Simone Bolzoni und mir gleichzeitig gewonnene Bildpaar. Der Mond stand zu diesem Zeitpunkt fast genau in südlicher Richtung. Zudem befand er sich in der durch den Erdmittelpunkt und die beiden Beobachtungsorte definierten Ebene, was die Berechnungen vereinfacht.

Zunächst ist der Abstand d zwischen den Orten zu bestimmen. Gemeint ist hier nicht die entlang der Erdoberfläche gemessene Distanz, sondern der kürzeste Abstand durch den Erdkörper. Er lässt sich sehr einfach mit Hilfe der auf den Erdmittelpunkt bezogenen rechtwinkligen Koordinaten x, y und z beider Beobachtungsorte berechnen. Für jeden der beiden Orte berechnet man zunächst

$$x = (r_{\mathrm{Erde}} + h)\cos\lambda\cos\varphi$$
$$y = (r_{\mathrm{Erde}} + h)\sin\lambda\cos\varphi$$
$$z = (r_{\mathrm{Erde}} + h)\sin\varphi$$

Dabei bezeichnen λ und φ die geografischen Koordinaten des jeweiligen Orts und h seine Höhe über dem Meeresspiegel. r_{Erde} bezeichnet den Erdradius von 6378 Kilometern.

Der gesuchte Abstand d zwischen Freiburg im Breisgau (F) und Avigliana (A) lässt sich nun mit dem Satz von Pythagoras berechnen:

$$d = \sqrt{(x_A - x_F)^2 + (y_A - y_F)^2 + (y_A - y_F)^2}$$

Die geografischen Koordinaten und die Höhe über dem Meeresspiegel von Freiburg im Breisgau lauten:

λ_F = 7° 48′ 17″ Ost,
φ_F = 48° 3′ 07″ Nord,
h_F = 219 m NN.

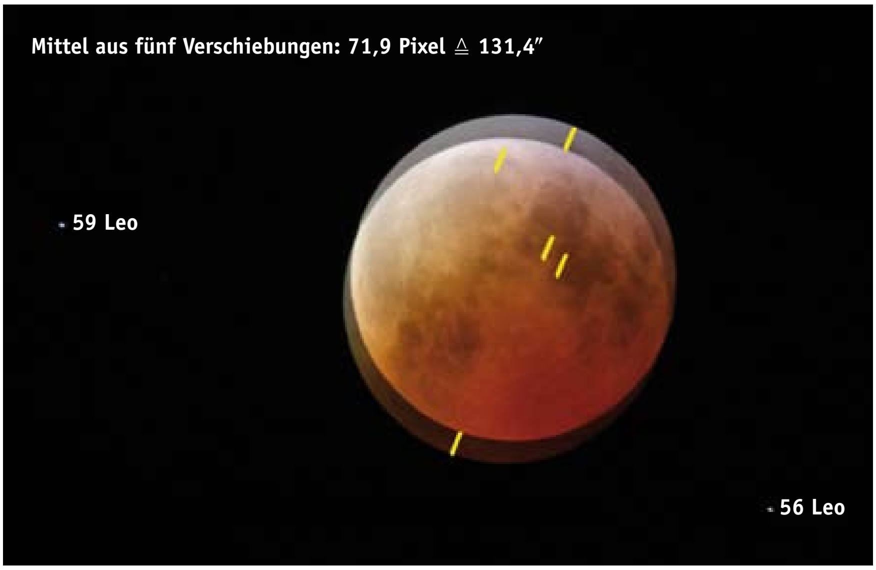
Die entsprechenden Angaben für Avigliana bei Turin lauten:

λ_A = 7° 23′ Ost,
φ_A = 45° 3′ Nord,
h_A = 400 m NN.

Hiermit erhält man für den Abstand d einen Näherungswert von 335,7 Kilometern. Eine wesentlich genauere Rechnung gelingt mit der im Internet verfügbaren Software Inverse 3D, die als Form des Erdkörpers keine Kugel, sondern ein Ellipsoid zugrunde legt. Das Programm liefert den Wert d = 335,2 Kilometer.

Im nächsten Schritt ermitteln wir aus den an beiden Orten aufgenommenen Bildern die Mondparallaxe π zwischen Freiburg im Breisgau und Avigliana in Italien. Wir bestimmen also den Winkel, um den die Mondposition zum Aufnahmezeitpunkt von Avigliana aus gegenüber Freiburg verschoben erschien.

Mit Hilfe eines Bildverarbeitungsprogramms wie Photoshop oder Gimp bringen wir die Aufnahmen zunächst auf einen einheitlichen Maßstab und drehen eine von ihnen so, dass sich die abgebildeten Sterne deckungsgleich überlagern (Abb. 3). Dazu empfiehlt es sich, im Programm mit Ebenen zu arbeiten und die obere Ebene halbtransparent zu halten. Die Positionen der Sterne sind in der Regel gut bekannt und lassen sich Astrometriekatalogen, wie zum Beispiel dem Hipparcos-Katalog, entnehmen. Für die beiden Referenzsterne 56 und 59 Leonis ergeben sich unter Berücksichtigung ihrer Eigenbewegung für den Aufnahme-



Martin Federspiel, Simone Bolzoni

Abb. 3: Dargestellt ist die bereits in Abbildung 1 gezeigte Kombination zweier von den Beobachtungsorten aus gleichzeitig aufgenommenen Bilder. Bringt man die darauf sichtbaren Sterne 56 und 59 Leonis zur Deckung, so zeigt sich unmittelbar die Parallaxenverschiebung des Mondes. Aus dem Winkelabstand der Sterne ergibt sich der Bildmaßstab. In das Bild eingezeichnet sind die gemessenen individuellen Verschiebungen gut sichtbarer Mondformationen.

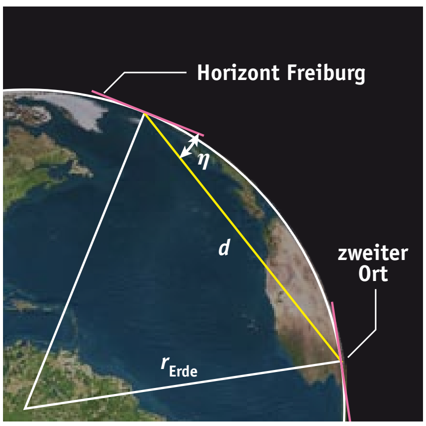
zeitpunkt die folgenden scheinbaren Positionen:

56 Leo: $\alpha = 10^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}\,25\overset{\mathrm{s}}{,}443$,
$\delta = +6°\,08'\,41\overset{\prime\prime}{,}91$
59 Leo: $\alpha = 11^{\mathrm{h}}\,1^{\mathrm{m}}\,08\overset{\mathrm{s}}{,}735$,
$\delta = +6°\,03'\,38\overset{\prime\prime}{,}65$

Diesen Positionen entspricht ein Winkelabstand von 4236,16 Bogensekunden. Zusammen mit dem linearen Abstand der Sterne von 2318 Pixeln auf dem kombinierten Bild ergibt sich der Maßstab des Bildes zu 1,8275 Bogensekunden pro Pixel. Etwaige Abbildungsfehler der Fotoobjektive bleiben hier unberücksichtigt.

Nun können die linearen Verschiebungen einiger gut sichtbarer Details auf dem Mond gemessen und mit Hilfe des Pixelmaßstabs in einen Winkel umgerechnet werden. Als Bezugspunkte eignen sich unter anderem der Nord- und Südrand der Mondscheibe, sowie die Krater Plato, Menelaus und Dionysius. Aus den gemessenen Einzelverschiebungen bilden wir eine mittlere Verschiebung und erhalten $\pi_{\mathrm{gemittelt}}$ = 71,9 Pixel, was 131,4 Bogensekunden entspricht.

Abb. 4: Von Freiburg aus gesehen befindet sich Avigliana um den Winkel η unterhalb der Horizontlinie. In der Skizze bezeichnet d die entlang der geraden Verbindungslinie gemessene Distanz zwischen den beiden Orten und r_{Erde} den Erdradius.



SuW-Grafik

Damit das Dreieck Freiburg – Avigliana – Mond vollständig bestimmt ist, muss noch ein weiterer Winkel bekannt sein (Abb. 2). Wir entscheiden uns für ϕ, den von Freiburg aus betrachteten Winkelabstand zwischen dem Mond und Avigliana. In diesem Winkel steckt im Wesentlichen die Höhe $H_{\mathrm{Mond,\,F}}$ des Mondes über dem Freiburger Horizont, die sich im Prinzip mit einem Sextanten messen lässt. Hier wurde sie jedoch mit einem Astronomieprogramm berechnet. Hinzu kommt ein weiterer Term, der berücksichtigt, dass Avigliana unter dem Freiburger Horizont liegt. In guter Näherung gilt: $H_{\mathrm{Mond,\,F}} + \eta_{\mathrm{A}} = 48\overset{\circ}{,}13 + 1\overset{\circ}{,}50 = 49\overset{\circ}{,}63$, wobei η_{A} die Höhe von Avigliana unter dem Freiburger Horizont bezeichnet (Abb. 4).

Man berechnet die Höhe η eines Ortes unter dem Freiburger Horizont, der sich in der direkten Entfernung d befindet, aus $\sin\eta = d/(2\,r_{\mathrm{Erde}})$. Damit folgt für den dritten Winkel $\beta = 180° - \phi - \pi = 130\overset{\circ}{,}3335$. Die Entfernung r des Mondes von Freiburg lässt sich nun mit Hilfe des Sinussatzes berechnen: $d/\sin\pi = r/\sin\beta$. Daraus folgt $r = d\,\sin\beta/\sin\pi$ = 401 000 Kilometer.

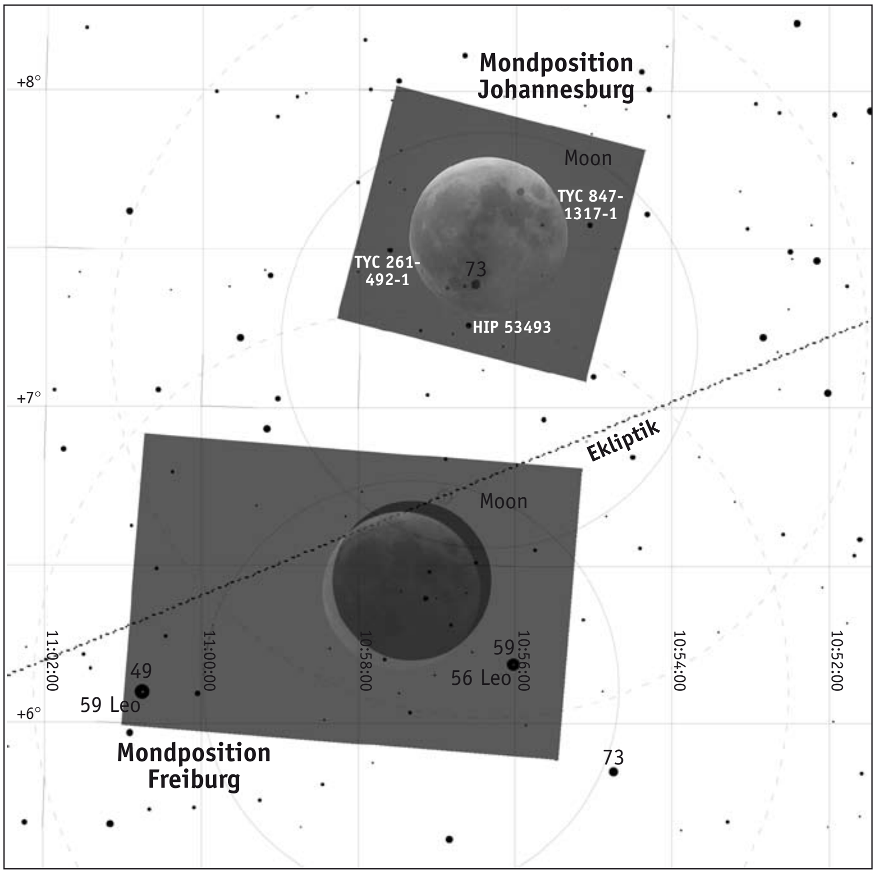
Die mit der interaktiven Ephemeride Horizons berechnete tatsächliche Entfernung des Mondes von Freiburg betrug zum Aufnahmezeitpunkt rund 397 500 Kilometer, der absolute Entfernungsfehler liegt also bei rund 3700 Kilometern. Dies entspricht einem relativen Fehler von knapp einem Prozent. Das Ergebnis ist sehr befriedigend und liegt in der erwarteten Größenordnung, wenn man bedenkt, dass ein Fehler von einer Bogensekunde in der Hauptfehlerquelle π zu einem Fehler von 3000 Kilometern in der Entfernung r führt. Etwaige Fehler in den Winkeln β und ϕ machen sich wesentlich weniger im Ergebnis bemerkbar und seien deshalb hier vernachlässigt.

Parallaxenbestimmung mit der Basislinie Freiburg-Johannesburg

Grundsätzlich ist es vorteilhaft, eine Parallaxenmessung mit einer möglichst großen Basislinie durchzuführen, denn damit sind der Parallaxenwinkel und die erzielbare Messgenauigkeit größer. Die Basislinie Europa-Südafrika ist schon nahe am Maximum dessen, was sich für ein Mondparallaxenprojekt überhaupt realisieren lässt. In unserem Fall besteht für die Auswertung aber die Schwierigkeit, dass sich bei einer Aufnahmebrennweite von rund tausend Millimetern die Hintergrundsternfelder nicht mehr überlappen (Abb. 5). Die Auswertung erfolgt deshalb auf einem geringfügig anderen Weg als oben beschrieben.

Mit einem guten Sternkartenprogramm wie der Software XEphem lassen sich die Sterne auf den Mondfinsternisaufnahmen identifizieren. Es ist nützlich, die Sternkarte mit Koordinatenlinien als Bilddatei abzuspeichern, und anschließend in einem Bildverarbeitungsprogramm die Mondbilder über die Sternkarte zu legen. Die Mondpositionen lassen sich nun direkt aus der Sternkarte ablesen; dazu sollte der Maßstab der Karte möglichst groß sein.

Im konkreten Fall trat eine weitere Schwierigkeit auf, weil die Beobachtungen im Voraus nicht abgesprochen waren. Das in Südafrika gewonnene Bild wurde am 3. März 2007 um 23:01 Uhr UT aufgenommen, das erste für das Projekt brauchbare Bild in Freiburg jedoch um 23:08 Uhr UT. Aus der Freiburger Bildse-



Martin Federspiel, George Liakos

Abb. 5: Die Sternkarte enthält die überlagerten Bilder des verfinsterten Mondes, die in Rustenburg bei Johannesburg (oben) und in Freiburg (unten) aufgenommen wurden. Der dunkle Kreis, der gegenüber dem Freiburger Mondfoto etwas nach rechts oben verschoben ist, markiert die für Freiburg berechnete Mondposition zum Zeitpunkt der Johannesburger Aufnahme um 23:01 Uhr UT am 3. März 2007.

rie bis 23:50 Uhr UT musste deshalb zunächst die Mondposition für Freiburg um 23:01 Uhr UT extrapoliert werden. Die Abbildung 5 zeigt das Sternfeld und die von den beiden Standorten aufgenommenen Mondfotos. Die auf den Zeitpunkt 23:01 Uhr UT extrapolierte Mondposition für Freiburg ist der dunkle Kreis, der gegenüber der gegen 23:08 Uhr UT fotografierten Mondposition etwas nach rechts oben verschoben ist. Anhand der Karte ließen sich die folgenden topozentrischen Mondpositionen für 23:01 Uhr UT ermitteln:

Ort	α_{2000}	δ_{2000}
Rustenburg	$10^{h}56{,}^{m}3$ = 164,086°	+7°33′ = +7,542°
Freiburg	$10^{h}57{,}^{m}3$ = 164,331°	+6°27′ = +6,448°

Alternativ könnte man die Mondpositionen mit wesentlich höherer Genauigkeit, aber auch größerem Aufwand auf den Fotos mit einem Astrometrieprogramm, beispielsweise mit Astrometrica, bestimmen.

Wir nähern die Himmelskugel lokal durch eine Ebene an und erhalten mit genügender Genauigkeit den Abstand der beiden von Freiburg (F) und Rustenburg (R) aus gemessenen Positionen, das heißt, die gesuchte Parallaxe:

$$\pi = \sqrt{[(\alpha_F - \alpha_R)\cos\delta_{Mittel})]^2 + (\delta_F - \delta_R)^2}$$
$$= 1{,}^{\circ}122,$$

wobei δ_{Mittel} = 7° die ungefähre mittlere Deklination des Mondes ist. Weiter berechnen wir mit den geografischen Koordinaten von Rustenburg λ_R = 27° 13′ 53″ Ost, φ_R = 25° 42′ 03″ Süd, der Höhe des Orts über dem Meeresspiegel von h_R = 1270 m NN und mit den oben genannten Koordinaten von Freiburg wie bereits beschrieben die rechtwinkligen Koordinaten *x*, *y*, und *z*. Zusammen mit den entsprechenden Koordinaten für Freiburg ergibt sich sich der genäherte direkte Abstand zwischen den Orten zu d = 7836 Kilometern. Die Software Inverse 3D liefert wiederum einen genaueren Abstand von d = 7797 Kilometern.

Und wieder haben wir Glück: Um 23:01 Uhr UT steht der Mond von Freiburg aus gesehen bis auf drei Grad genau in der gleichen Azimutrichtung wie in Rustenburg. Somit lässt sich der Winkel β in guter Näherung analog zu dem zuvor beschriebenen Fall Freiburg-Avigliana berechnen:

$$\beta = 180° - \pi - (H_{Mond,F} + \eta_R)$$
$$= 180° - 1{,}^{\circ}122 - (47{,}^{\circ}50 + 37{,}^{\circ}68)$$
$$= 93{,}^{\circ}698.$$

Gemäß der Gleichung $r = d \sin\beta / \sin\pi$ ergibt sich dann die Entfernung des Mondes von Freiburg zu r = 397 400 Kilometern, was wiederum sehr gut mit der tatsächlichen topozentrischen Mondentfernung um 23:01 Uhr UT von 397 448 Kilometern übereinstimmt.

Wegen der größeren Basislinie wirkt sich ein Fehler in der Parallaxe π viel weniger auf die daraus berechnete Entfernung r aus als im Fall der Basislinie Freiburg – Avigliana. Ein um eine Bogenminute (nicht Bogensekunde wie im ersten Beispiel!) fehlerhafter Wert in π führt in der Entfernung zu einem Fehler von rund 6000 Kilometern.

Bei unserer Ablesung der Mondpositionen aus einer Sternkarte liegt der Fehler sicherlich im Bereich einiger Bogenminuten. Im Falle einer sorgfältigeren Positionsbestimmung mit Hilfe eines Astrometrieprogramms ließe sich die Mondentfernung zuverlässig auf einige hundert Kilometer genau messen. Mit Blick auf den verhältnismäßig geringen experimentellen und konzeptionellen Aufwand ist das Ergebnis sehr befriedigend; von der mit den Instrumenten des Lunar Laser Ranging erreichbaren Messgenauigkeit ist man allerdings noch immer einen Faktor von rund zehn Millionen entfernt. □

Danksagung: Diese Arbeit wäre nicht möglich gewesen ohne die schnelle und sehr freundliche Hilfe von Simone Bolzoni, dem ich an dieser Stelle noch einmal herzlich für seine Bilder und die gute Zusammenarbeit danken möchte. Karl-Ludwig Bath gebührt ein besonderer Dank für die Anregung des Projekts vor einigen Jahren und für die Beschaffung des Materials von Georges Liakos.

Weblinks zum Thema mit Hinweisen zu den erwähnten Computerprogrammen finden Sie unter **www.suw-online.de/artikel/936513.**

Martin Federspiel ist Astrophysiker und arbeitet am Planetarium Freiburg. Als Amateurastronom engagiert er sich bei den Sternfreunden Breisgau.