

# Logik, Mengen, Abbildungen – die Sprache der Mathematik

## 2

### TEIL I



Was sind Aussagen?  
Wie lassen sich  
Zusammenhänge zwischen  
Objekten formal beschreiben?  
Wozu braucht man Mengen?  
Was ist der Unterschied  
zwischen rationalen und  
reellen Zahlen?

2.1	Eine beweisende Wissenschaft .....	14
2.2	Grundbegriffe der Aussagenlogik .....	15
2.3	Definition, Satz, Beweis .....	22
2.4	Elementare Mengenlehre .....	25
2.5	Zahlenmengen .....	29
2.6	Abbildungen .....	32
2.7	Mächtigkeit von Mengen .....	36
	Zusammenfassung .....	38
	Bonusmaterial .....	39
	Aufgaben .....	40

Wer eine neue Sprache lernen will, benötigt ein gewisses Grundvokabular, um sich einigermaßen zurechtzufinden und seine Kenntnisse auf dieser Basis weiter auszubauen. In einer Fremdsprache sind das viele hundert, ja eher mehrere tausend Vokabeln. In der Mathematik kommt man für den Anfang mit sehr viel weniger *Wörtern* aus.

Viel ist dabei schon gewonnen, wenn man lernt, gewohnte Begriffe exakt zu verwenden und präzise Formulierungen lesen und verstehen zu können. Das mag simpel klingen, macht aber am Anfang oft Schwierigkeiten. Die saubere Handhabung der Sprache führt über Abstraktion zur Aussagenlogik, und diese wiederum ist die Grundlage der gesamten Digitalelektronik und damit der Grundstein der heutigen Informationsgesellschaft.

Natürlich ist präzises Formulieren alleine zu wenig, man muss auch wissen, worüber man überhaupt sprechen soll. Viele Begriffsbildungen in der Mathematik beruhen auf Mengen und Abbildungen, und diesen werden wir gebührenden Raum widmen.

Äußerst bekannte Mengen sind solche von Zahlen. Sicher spielen Zahlen in der Mathematik eine wichtige Rolle, die Bedeutung des bloßen Zahlenrechnens wird von Außenstehenden allerdings meist überschätzt. Es ist demnach auch weniger das konkrete Rechnen, das uns hier bei der Betrachtung der Zahlen interessiert. Es sind vielmehr die inneren Strukturen und allgemeinen Eigenschaften, die sie haben – der Beginn eines Analyseprozesses, der uns im Laufe dieses Buches bis zu den Hilberträumen der Funktionalanalysis und darüber hinaus führen wird.

## 2.1 Eine beweisende Wissenschaft

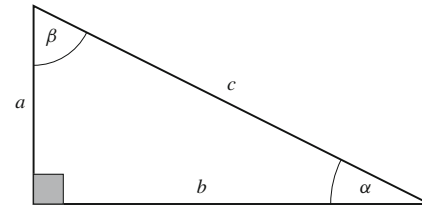
Zwei entscheidende Konzepte in der Mathematik sind *Sätze* und *Beweise*. Schon im Einleitungskapitel wurde darauf hingewiesen – nun wollen wir diesen Themenbereich vertiefen und mit Leben füllen. Um zu demonstrieren, wie ein Beweis funktionieren kann und was es dabei zu beachten gilt, machen wir einen kurzen Abstecher in die elementare Geometrie.

In rechtwinkligen Dreiecken nennt man die am rechten Winkel anliegenden Seiten die *Katheten*, die ihm gegenüberliegende Seite die *Hypotenuse*. Der *Satz des Pythagoras* besagt nun (salopp formuliert):

*In jedem ebenen rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse.*

Abbildung 2.1 zeigt ein allgemeines rechtwinkliges Dreieck. Hier gilt  $a^2 + b^2 = c^2$ .

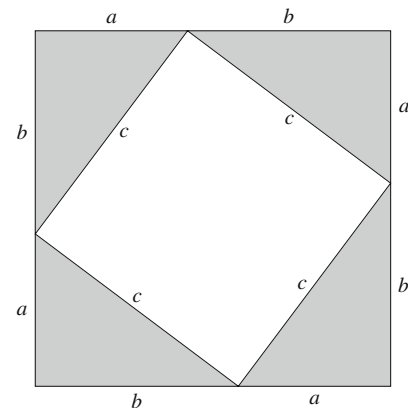
Diese Tatsache war schon den Babyloniern und in anderen Hochkulturen, etwa dem dynastischen Ägypten bekannt. Doch der entscheidende Sprung geschah im antiken Griechenland – die Geburt der Mathematik als beweisende Wissenschaft.



**Abbildung 2.1** Ein allgemeines rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $a$ ,  $b$  und der Hypotenuse  $c$ .

Pythagoras begnügte sich nicht damit, den obigen Sachverhalt als empirische Tatsache hinzunehmen, im Sinne von „bis man ein Gegenbeispiel findet, nehmen wir an, es stimmt“. Er suchte und fand einen Beweis, in dem mit logischen Argumenten gezeigt wird, dass der Lehrsatz in der Tat *immer* gilt und niemand jemals ein Dreieck finden wird, das die Voraussetzungen erfüllt und sich trotzdem anders verhält.

Für einen solchen Beweis nehmen wir vier gleichartige, nur jeweils entsprechend gedrehte Exemplare des allgemeinen rechtwinkligen Dreiecks und setzen sie so zusammen, dass man ein großes Quadrat wie in Abbildung 2.2 erhält.



**Abbildung 2.2** Ein Quadrat, gebildet aus vier gleichartigen rechtwinkligen Dreiecken.

Dabei stellen wir fest, dass das Viereck, das dabei im Inneren entsteht, wieder ein Quadrat ist. Da die Winkelsumme in jedem Dreieck  $180^\circ$  beträgt, ergänzen sich die beiden an einer Ecke anliegenden Winkel, wie in Abbildung 2.3 dargestellt, jeweils zu  $90^\circ$ .

Die Seitenlänge des großen Quadrats ist  $a + b$ , seine Fläche beträgt damit

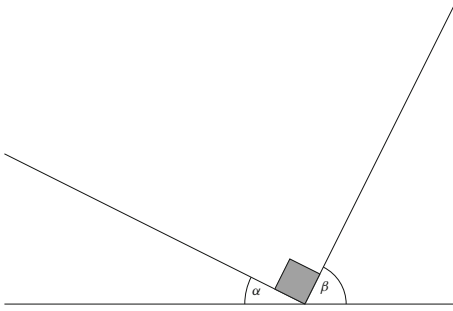
$$A_Q = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Nun wissen wir, dass dieses Quadrat aus vier Dreiecken mit der Fläche

$$A_\Delta = \frac{ab}{2}$$

und einem kleinen Quadrat mit der Seitenlänge  $c$ , also der Fläche

$$A_q = c^2,$$



**Abbildung 2.3** Beim Aneinanderlegen der Dreiecke entstehen wieder rechte Winkel und damit im Inneren ein Quadrat.

besteht. Da sich die Fläche des Quadrats nicht ändern darf, egal, nach welcher Methode sie gerade berechnet wird, muss gelten

$$A_Q = 4A_\Delta + A_q,$$

oder, wenn man die jeweiligen Flächenformeln einsetzt,

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2.$$

Den Term  $2ab$  kann man natürlich auf beiden Seiten subtrahieren, man erhält dann als Resultat

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Da die Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  nicht näher festgelegt sind, gilt der Beweis für *jedes* ebene rechtwinklige Dreieck.

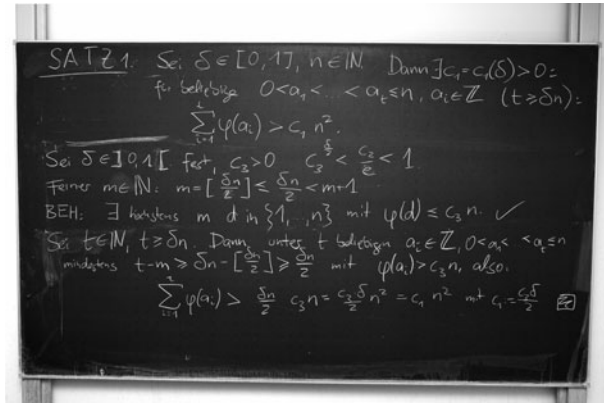
Pythagoras, so erzählt die Legende, opferte den Göttern hundert Ochsen, nachdem ihm der Beweis gelungen war – und, so heißt es, seitdem zittern alle Ochsen immer dann, wenn eine neue Wahrheit ans Licht kommt.

Wir lassen die Ochsen am Leben und betrachten lieber nochmals kritisch unser Beispiel, besonders bezüglich der Voraussetzungen:

- Wir sind ausgegangen von einem *ebenen* Dreieck. Sobald die Ebene verlassen wird, etwa in gekrümmten Räumen, bricht der Beweis zusammen, denn dann ist etwa das Argument mit den sich zu  $90^\circ$  ergänzenden Winkeln nicht mehr gültig.
- Schon unsere Formulierung des Satzes war schlampig: Statt „Summe der Quadrate der Katheten“ hätten wir beispielsweise präziser „Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten“ schreiben sollen. Verwendete Begriffe sollen so genau wie möglich geklärt werden.
- Bereits vor der Beweisführung müssen wir – selbst wenn es trivial wirkt – wissen, was ein Dreieck überhaupt ist, was Winkel und insbesondere rechte Winkel sind. So klar das auch erscheinen mag, selbst in scheinbar einfachen Fällen kann es verborgene Tücken geben.
- Wir müssen davon ausgehen, dass wir die Flächenformeln für Quadrat und rechtwinkliges Dreieck kennen – dazu muss zunächst einmal geklärt sein, was überhaupt ein Flächeninhalt ist.

- Für die Umformung der Gleichung müssen wir wissen, ob diese Operation auch erlaubt ist. Man spricht in diesem Fall von *Äquivalenzumformungen*.
- Wir müssen davon ausgehen, dass wir die logische Argumentation, etwa „da die beiden Flächen gleich groß sind ...“ richtig führen.

Als kritische Punkte erweisen sich also: Was sind die *Objekte*, über die wir sprechen, welche *Voraussetzungen* oder „Spielregeln“ haben wir generell zu beachten, wie formulieren wir auf korrekte Weise möglichst weitreichende *Aussagen* und wie beweisen wir sie mit den Mitteln der *Logik*?



**Abbildung 2.4** Ein umfangreicherer Beweis, wie er gelegentlich in Mathematikvorlesungen an der Tafel steht.

Diese Fragen geben folgerichtig auch das Programm für den Rest dieses Kapitels vor, ergänzt mit einigen weiteren wichtigen Begriffen.

## 2.2 Grundbegriffe der Aussagenlogik

Die **Aussagenlogik** ist ein Grundpfeiler der modernen Mathematik. Diese Erkenntnis ist noch nicht sehr alt. Erst zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts wurde klar, dass letztlich nahezu alle mathematischen Sachverhalte *Aussagen* sind und mit den Mitteln der Aussagenlogik, die als eigene Disziplin bereits seit der Antike bestand, behandelt werden können.

Für uns entscheidend ist dabei vor allem eines:

### Grundprinzip der Logik

In der Logik, ja generell bei der Formulierung mathematischer Sachverhalte, müssen alle verwendeten Ausdrücke eine klare, scharf definierte Bedeutung haben.

Diese *harte* Handhabung steht in klarem Gegensatz zur Alltagssprache, in der viele Dinge absichtlich oder unabsichtlich mehrdeutig sind und wo man sich hinterher oft mit „aber das

hatte ich doch ganz anders gemeint . . .“ aus der Affäre ziehen kann. Gerade das wollen wir hier eben nicht zulassen, bei jedem Satz sollen sowohl Voraussetzungen als auch Aussagen klar und präzise sein.

Dies hat natürlich weitreichende Konsequenzen. So darf man bei einem derartigen mathematischen Satz üblicherweise kein einziges Wort weglassen, dazunehmen oder verändern. Insbesondere der Versuchung, die Voraussetzungen verkürzt, und damit fast immer verfälscht, zu formulieren oder gar wegzulassen, muss man des Öfteren widerstehen.

### Aussagen sind die Grundlage mathematischer Formulierungen

Grundvoraussetzung für eindeutige Formulierungen ist es einerseits, alle irgendwo vorkommenden Begriffe sauber zu *definieren* – damit werden wir uns in Abschnitt 2.3 noch auseinanderzusetzen. Andererseits aber, und das ist unser dringlichstes Anliegen, müssen wir klarstellen, was *Aussagen* überhaupt sind und wie man sie handhabt:

#### Definition des Begriffs Aussage

Eine **Aussage** ist ein feststellender Satz, dem eindeutig einer der beiden **Wahrheitswerte** *wahr* oder *falsch* zugeordnet werden kann.

**Beispiel** Bei Aussagen kann es sich um Feststellungen aus dem Gebiet der Mathematik handeln, etwa

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ für beliebige Zahlen } a \text{ und } b$$

oder

$$|\sin x| \leq 1 \text{ für alle reellen Zahlen } x.$$

Genauso gut sind aber auch andere Aussagen möglich, z. B. „der 1. Januar der Jahres 1492 fiel auf einen Donnerstag“ oder „der Himmel ist blau“.

Bei alltäglichen Sätzen wie etwa „dieses Bild ist schön“ ist es oft schwer oder gar unmöglich, einen eindeutigen Wahrheitswert zuzuordnen. Streng genommen handelt es sich dabei nicht um Aussagen im Sinne der Logik. Keine Aussagen sind auf jeden Fall Fragen, Befehle oder Satzfragmente.

### ?

Welchen der folgenden Ausdrücke sind Aussagen?

1. Fünf ist eine ungerade Zahl.
2. Alle Schwäne sind weiß.
3. Fünf ist eine gerade Zahl.
4. Stimmt das überhaupt?
5. . . . und überhaupt und sowieso.
6. Gib das her!

Zur Formulierung mathematischer Aussagen werden oft *Symbole* eingesetzt. Tatsächlich ist die intensive Verwendung

von Symbolen ein am Anfang oft abschreckender Zug der Mathematik.

Doch Symbole ermöglichen eine effiziente Beschreibung vieler Sachverhalte, und oft sind sie die einzige Möglichkeit, eine Aussage übersichtlich zu formulieren.

In der Mathematik wird üblicherweise nur eine kleine Zahl von Symbolen benutzt. Und das ist gut so – denn ansonsten würde man eine überladene und unübersichtliche Notation erhalten. Das bedeutet aber auch, dass ein Symbol je nach Zusammenhang für verschiedene Dinge stehen kann.

**Beispiel** Das simple Zeichen „0“ kann zum Beispiel – je nach Zusammenhang – die Zahl Null, den Nullvektor, eine identisch verschwindende Funktion, die Nullmatrix oder allgemein das neutrale Element einer additiv geschriebenen Gruppe bedeuten, und damit sind die Möglichkeiten bei Weitem noch nicht erschöpft.

In manchen Fällen kann hier eine zusätzliche Kennzeichnung, etwa Fettdruck bei Vektoren, ein wenig helfen, aber auch damit ist das Problem nicht aus der Welt geschafft. Man muss sich von Fall zu Fall überlegen, was die unschuldig aussehende Null in diesem Zusammenhang bedeuten soll. ◀

Das ist kein Widerspruch zur oben verlangten Eindeutigkeit der Begriffe, bedeutet aber natürlich zusätzliche Verantwortung sowohl für Autoren als auch für Leser. Notgedrungen ist es die Aufgabe desjenigen, der einen mathematischen Text verfasst, sicherzustellen, dass bei jedem Symbol klar ist, was es in diesem Kontext bedeutet. Umgekehrt hat aber auch derjenige, der den Text liest, einen nicht minder wichtigen Auftrag.

#### Lesen von Symbolen

Bei jedem in einer mathematischen Aussage, etwa einer Formel, vorkommenden Symbol muss man sich bewusst machen, was dieses Symbol hier bedeutet, um die Aussage verstehen und verwenden zu können.

### Man kann Aussagen mittels Junktoren zu neuen Aussagen verbinden; die wichtigsten sind *nicht*, *und* und *oder*

Meist ist man nicht nur an einzelnen Aussagen interessiert, sondern will sie irgendwie verknüpfen. Das geschieht auf ganz ähnliche Weise wie in der Alltagssprache mit Bindewörtern wie *nicht*, *und* oder *oder*. In der formalen Logik nennt man diese Bindewörter **Junktoren**. In ihrer Handhabung gibt es ab und zu gewisse Feinheiten zu beachten.

Diese werden wir nun der Reihe nach diskutieren. Um unsere Notation knapp und übersichtlich zu halten, werden wir Aussagen oft durch einen einzelnen Großbuchstaben, etwa *A*, *B*, *C*, kennzeichnen.

Eines der wichtigsten Dinge überhaupt, die man mit einer Aussage tun kann, ist, sie zu verneinen, also sie gewissermaßen umzukehren. Die **Negation** (Nicht-Verknüpfung) einer Aussage  $A$  wird durch „ $\neg A$ “ gekennzeichnet. In manchen Büchern wird stattdessen auch die Notation  $\sim A$  oder  $\bar{A}$  verwendet.

Wie man es gewohnt ist, ist  $\neg A$  dann falsch, wenn  $A$  wahr ist und umgekehrt. Dies kann man auch so ausdrücken:  $\neg A$  ist *genau* dann falsch, wenn  $A$  wahr ist.

Da wir es bald mit komplizierteren Junktoren zu tun haben werden, führen wir schon jetzt ein praktisches Hilfsmittel ein – die **Wahrheitstafel**. Mit ihrer Hilfe kann man derartige Sachverhalte auf übersichtliche Weise darstellen. Links stehen alle möglichen Kombinationen der *Eingangsvariablen*, rechts die entsprechenden Ausgangswerte. *Wahr* und *Falsch* werden dabei einfach durch  $w$  und  $f$  abgekürzt.

In diesem Fall gibt es nur eine Eingangsvariable, wodurch die Wahrheitstafel noch sehr übersichtlich bleibt.

$A$	$\neg A$
$w$	$f$
$f$	$w$

**Beispiel** Die Negation von „heute regnet es“ wäre „heute regnet es nicht“. Widerstehen sollte man allerdings der Versuchung, als Verneinung etwa „heute scheint die Sonne“ anzugeben, denn es könnte ja auch einfach bewölkt sein, schneien oder dichten Nebel geben.



**Abbildung 2.5** Dass es nicht regnet, bedeutet noch lange nicht, dass auch die Sonne scheint.

Die Negation von „ $x < 5$ “ darf man hingegen tatsächlich als „ $x \geq 5$ “ schreiben, denn beim Vergleichen von reellen Zahlen gibt es nur drei Möglichkeiten – kleiner, größer oder gleich. Wenn die erste nicht zutrifft, dann muss eine der beiden anderen wahr sein. ◀

Ebenso wichtig wie eine einzelne Aussagen zu verneinen ist es, zwei Aussagen  $A$  und  $B$  zu einer neuen „ $A$  und  $B$ “ zu verbinden. Dabei soll wie gewohnt gelten, dass „ $A$  und  $B$ “ *nur* dann wahr ist, wenn sowohl  $A$  als auch  $B$  für sich wahr sind: „Die Sonne scheint und wir haben frei“ kann eben nur stimmen, wenn auch wirklich beides erfüllt ist; sobald eine

der beiden Teilaussagen falsch ist, ist es auch die Gesamtaussage.

Den entsprechenden Junktor nennt man **Konjunktion** (Und-Verknüpfung), er wird üblicherweise durch das Zeichen „ $\wedge$ “ dargestellt. Als Merkhilfe, die Spitze zeigt wie beim „ $\wedge$ “ von AND nach oben. Die Wahrheitstafel hat bereits vier Zeilen, entsprechend der möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten.

$A$	$B$	$A \wedge B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$f$

**Kommentar:** Man sieht bereits den großen Nachteil der Wahrheitstafeln – für viele Eingangsvariablen explodieren sie regelrecht. Bei 3 Eingangsvariablen bräuchte man 8 Zeilen, bei 4 wären es 16 und bei 10 schon 1 024.

Eine weitere Möglichkeit, zwei Aussagen zu verbinden ist mittels *oder*. Dabei muss man aber beachten, dass im Sprachgebrauch *oder* zwei verschiedene Bedeutungen haben kann. Es wird nämlich sowohl ein- als auch ausschließend verwendet.

**Beispiel** „Wir suchen eine Fachkraft mit Englisch- oder Französischkenntnissen“ bedeutet üblicherweise nicht, dass jemand abgelehnt würde, der Englisch *und* Französisch beherrscht. „Die Maschine läuft oder sie tut es nicht“ hingegen ist ausschließend – nur einer der beiden Fälle kann eintreten. ◀

In der Logik wird das Oder einschließend, also im Sinne eines *und/oder* verwendet. Der entsprechende Junktor heißt **Disjunktion** (Oder-Verknüpfung), symbolisiert durch ein „ $\vee$ “. Eine Merkhilfe für humanistisch Gebildete ist, dass die Spitze wie beim  $\vee$  des lateinischen *vel* nach unten zeigt.  $A \vee B$  ist also dann wahr, wenn zumindest eine der beiden Aussagen  $A$  und  $B$  wahr ist.

$A$	$B$	$A \vee B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$w$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$f$

Doch nicht nur die fixe Festlegung auf ein einschließendes Oder unterscheidet die logischen Junktoren von ihren umgangssprachlichen Gegenstücken. So verbinden wir mit den Worten *und* bzw. *oder* oft einen zeitlichen oder gar kausalen Zusammenhang. Ein solcher Aspekt fehlt in der Aussagenlogik völlig.

**Beispiel** So gibt es in der Alltagssprache einen feinen Unterschied zwischen „Otto wurde krank und der Arzt verschrieb ihm Medikamente“ und „Der Arzt verschrieb ihm Medikamente und Otto wurde krank“.

Im Rahmen der Aussagenlogik gibt es zwischen diesen beiden Sätzen hingegen keinerlei Unterschied. ◀

### Auch Implikation und Äquivalenz sind wichtige Junktoren

Natürlich gibt es noch weitere Möglichkeiten, zwei Aussagen zu verknüpfen. Eine der wichtigsten sind Folgerungen der Art „wenn A, dann B“. *Wenn A wahr ist, so gilt auch B.*

Die **Implikation** (Wenn-Dann-Verknüpfung, auch als **Subjunktion** bezeichnet) wird durch einen Doppelpfeil nach rechts dargestellt und soll genau das leisten. Allerdings geht man bei ihrer Definition einen auf den ersten Blick recht seltsamen Weg.  $A \Rightarrow B$  ist nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Ist also A von vornherein falsch, dann ist die *Gesamtaussage*  $A \Rightarrow B$  immer wahr.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Diese Definition ist für die meisten anfangs recht kontraintuitiv. Ein wenig anschaulicher wird diese Konvention vielleicht durch folgendes Beispiel.

**Beispiel** Wir untersuchen das Produkt zweier ganzer Zahlen  $m$  und  $n$  und betrachten die Implikation „Für alle natürlichen Zahlen  $m$  und  $n$  gilt: Wenn  $m$  gerade ist, dann ist auch das Produkt  $m \cdot n$  gerade“. In unserer Notation liest sich das als

- A: „ $m$  ist gerade“,
- B: „ $m \cdot n$  ist gerade“

Zu untersuchen haben wir die Aussage, dass für alle natürlichen Zahlen  $A \Rightarrow B$  gilt.

Für  $n$  gibt es keine Einschränkungen, diese Zahl kann gerade oder ungerade sein. Wir haben vier mögliche Fälle zu unterscheiden.

- $m$  und  $n$  sind beide gerade. Gerade Zahlen kann man in der Form  $m = 2k, n = 2l$  schreiben, wobei  $k$  und  $l$  immer noch ganze Zahlen sind. Für das Produkt erhalten wir

$$n \cdot m = 2k \cdot 2l = 4kl = 2 \cdot \underbrace{(2kl)}_{\text{ganze Zahl}},$$

was sicher wieder eine gerade Zahl ist. Sowohl Bedingung A als auch Folgerung B sind wahre Aussagen.

- $m$  ist weiterhin gerade,  $n$  hingegen ungerade und kann als  $n = 2l + 1$  mit einer ganzen Zahl  $l$  geschrieben werden:

$$n \cdot m = 2k \cdot (2l + 1) = 4kl + 2k = 2 \cdot \underbrace{(2kl + k)}_{\text{ganze Zahl}}$$

Das Produkt ist wieder eine gerade Zahl. Auch hier sind sowohl Bedingung A als auch Folgerung B wahre Aussagen.

- Nun betrachten wir den umgekehrten Fall, dass  $m$  ungerade und  $n$  gerade ist:

$$n \cdot m = (2k + 1) \cdot 2l = 4kl + 2l = 2 \cdot \underbrace{(2kl + l)}_{\text{ganze Zahl}}$$

Wieder erhalten wir eine gerade Zahl. Nun war die Bedingung A falsch, die Folgerung B hingegen weiterhin wahr.

- Übrig bleibt noch der Fall, dass  $m$  und  $n$  ungerade sind,

$$n \cdot m = (2k + 1) \cdot (2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2 \cdot \underbrace{(2kl + k + l)}_{\text{ganze Zahl}} + 1,$$

und nun haben wir ein ungerades Ergebnis erhalten. Hier sind also sowohl Bedingung A als auch Folgerung B falsch.

Wenn A wahr war, dann war auch B wahr; bei falschem A waren beide Fälle möglich. Für die Implikation  $A \Rightarrow B$  haben wir in allen Fällen *wahr* erhalten – die Aussage ist also richtig. ◀

**Kommentar:** In der Aussagenlogik gilt das Prinzip *ex falso quodlibet* – aus Falschem folgt Beliebiges. Mit einer einzigen falschen Grundannahme kann man also, zumindest prinzipiell, jede beliebige Aussage beweisen. Der Legende nach war einer der Altmeister der mathematischen Logik, je nach Quelle Russel oder Whitehead, unvorsichtig genug, diese Tatsache einem befreundeten Journalisten gegenüber zu erwähnen – woraus sofort die Aufgabe folgte: „Gut, dann beweis’ doch, dass, wenn  $1 + 1 = 3$  ist, du der Papst bist.“ Kurzes Nachdenken, dann der Konter: „Nun,  $1 + 1 = 3$ . Davon ziehe ich eins ab, also ist  $1 = 2$  bzw.  $2 = 1$ . Zwei sind also eins, der Papst und ich sind zwei, wir sind eins – demnach bin ich der Papst.“

Hier ist die Ungültigkeit des Schlusses offensichtlich. Gerade als Anfänger neigt man in der Mathematik aber tatsächlich gerne dazu, aus einer Folgerung  $A \Rightarrow w$  zu schließen, dass auch A wahr ist. Das ist unzulässig!

Aus den beiden Aussagen „Alle Menschen sind exzellente Schachspieler“ und „Kasparov ist ein Mensch“ kann man sofort schließen, dass Kasparov ein exzellenter Schachspieler ist. Die erste Aussage ist jedoch sehr fragwürdig, und nur durch die Ableitung eines gültigen Schlusses hat man sie noch lange nicht bewiesen.

Weiter möchte man gerne eine Art Gleichheitsbegriff für Aussagen zur Verfügung haben und definiert dazu die **Äquivalenz** (Genau-Dann-Wenn-Verknüpfung). Sie wird durch einen Doppelpfeil  $\Leftrightarrow$  zwischen den Aussagen symbolisiert.  $A \Leftrightarrow B$  wird gelesen als „genau dann A, wenn B“.

Die Gesamtaussage  $A \Leftrightarrow B$  ist wahr, wenn A und B entweder beide wahr oder beide falsch sind. Ist eine der beiden

Aussagen wahr, die andere falsch, so ist auch  $A \Leftrightarrow B$  falsch.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Im Zusammenhang mit der *Implikation* wollen wir eine gängige und sehr verbreitete Sprechweise vorstellen. Hat man eine wahre Aussage  $A \Rightarrow B$  vorliegen, so sagt man oft,  $A$  ist **hinreichend** für  $B$  oder  $B$  ist **notwendig** für  $A$ .

Insbesondere die zweite Sprechweise ist ein wenig gewöhnungsbedürftig, letztlich aber leicht erklärbar. Wenn  $A \Rightarrow B$  gilt und  $B$  bereits falsch ist, dann kann  $A$  keinesfalls mehr wahr sein. Insofern ist es tatsächlich notwendig, dass  $B$  wahr ist, damit  $A$  wahr sein kann.

Nochmal in Kurzfassung –  $A \Rightarrow B$  bedeutet:

- Wenn  $A$  wahr ist, dann ist auch  $B$  wahr.  
 **$A$  ist hinreichend für  $B$**
- $A$  kann nie wahr sein, wenn  $B$  falsch ist.  
 **$B$  ist notwendig für  $A$**

Sind zwei Aussagen äquivalent, so ist die eine notwendig und hinreichend für die jeweils andere.

**Beispiel** Um diese wichtigen Begriffe besser zu verdeutlichen, beginnen wir mit einem Fall aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, wobei wir den Begriff der Teilbarkeit hier als bekannt voraussetzen. Dass eine Zahl  $m$  durch  $n$  teilbar ist, schreiben wir als  $n|m$ . Gesprochen wird das als „ $n$  teilt  $m$ “, siehe auch Bonusmaterial „Zahlentheorie“.

Teilbarkeit durch zwölf ist *hinreichend* für die Teilbarkeit durch sechs. Jede Zahl, die durch zwölf teilbar ist, ist auch durch sechs teilbar:

$$(12|n) \Rightarrow (6|n)$$

Teilbarkeit durch drei hingegen ist *notwendig* für Teilbarkeit durch sechs:

$$(6|n) \Rightarrow (3|n)$$

Jede Zahl, die durch sechs teilbar sein soll, muss auch durch drei teilbar sein. In beiden Fällen gilt die Umkehrung nicht.

Noch ein Beispiel aus einem ganz anderen Bereich: Einen Stein durch eine Fensterscheibe zu werfen ist hinreichend dafür, dass die Scheibe zerbricht, aber nicht notwendig, sie könnte ja auch anders zu Bruch gehen. Andererseits ist es dafür, dass ich einen Stein hindurchwerfe, notwendig, dass die Scheibe zerbricht – ich kann den Stein auf keine Art hindurchwerfen, ohne dass das passiert.

Insbesondere am letzten Beispiel sieht man auch, dass *hinreichend* und *notwendig* von vornherein keine zeitliche oder kausale Bedeutung tragen. Wenn  $B$  eine unvermeidbare Konsequenz von  $A$  ist, dann ist  $B$  für  $A$  ebenso notwendig, wie wenn  $B$  eine unbedingt zu erfüllende Vorbedingung für  $A$  wäre.



**Abbildung 2.6** Dass die Fensterscheibe zerbricht, ist notwendig dafür, dass ich einen Stein hindurchwerfe.

### Junktoren können kombiniert werden, um komplexere Aussagen zu erhalten

Mithilfe der Junktoren können beliebig komplizierte Aussagen zusammengesetzt werden, beispielsweise

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)). \quad (2.1)$$

Wie gewohnt geben hier die Klammern die Reihenfolge an, in der die Ausdrücke auszuwerten sind. Die Analyse solcher Ausdrücke erfolgt ebenfalls mittels Wahrheitstafeln, wobei man gewöhnlich zuerst einmal die vorkommenden einfacheren Aussagen betrachtet. Die Wahrheitswerte der Gesamtaussage werden meist hervorgehoben, etwa durch Fettschreibung.

A	B	$(A \Leftrightarrow B)$	$\Leftrightarrow$	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
w	w	w	<b>w</b>	w w w
w	f	f	<b>w</b>	f f w
f	w	f	<b>w</b>	w f f
f	f	w	<b>w</b>	w w w

Dass diese Aussage immer wahr ist, hat eine bemerkenswerte Konsequenz. „ $A \Leftrightarrow B$ “ ist gleichwertig mit „ $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ “. Daher lässt sich jede Äquivalenz  $\Leftrightarrow$  durch eine geeignete Kombination von  $\Rightarrow$  und  $\wedge$  ersetzen. Auf ähnliche Weise gilt auch:

$$(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$$

### Quantoren erlauben das knappe Hinschreiben von Existenz- und Allaussagen

Oft wollen wir Aussagen über ganze Klassen von Objekten machen, etwa „Zu jeder reellen Zahl  $x$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , die größer ist als  $x$ “.

In den meisten Fällen werden wir dabei mit den beiden Phrasen „es gibt“ und „für alle“ völlig auskommen. Wie zumeist in der Logik lehnt sich die Bedeutung möglichst nahe an die Alltagssprache an.

### Anwendung: Digitalelektronik und das Nand-Gatter

Die Aussagenlogik ist die Grundlage der gesamten Digitalelektronik und damit unter anderem der modernen Computertechnik. Erstaunlicherweise lassen sich beliebig komplizierte Schaltungen mit einer einzigen Art von Bauelement realisieren – dem Nand-Gatter.

Die Grundlage für das Nand-Gatter ist der entsprechende Junktor. Wir definieren das Nand  $\uparrow$  über  $(A \uparrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$  oder einfach mittels einer Wahrheitstafel

$A$	$B$	$A \uparrow B$
$w$	$w$	$f$
$w$	$f$	$w$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$w$

Nun zeigen wir, dass sich  $\neg A$ ,  $A \vee B$  und  $A \wedge B$  jeweils durch eine geschickte Kombination von Nands ausdrücken lassen. Da sich wiederum beliebige Verknüpfungen von Aussagen allein durch Negation, Konjunktion und Disjunktion beschreiben lassen, haben wir damit alles auf das Nand zurückgeführt.

- $A \uparrow A$  ist genau dann wahr, wenn  $A$  falsch ist; der Ausdruck ist also äquivalent mit  $\neg A$ .
- Nach Definition ist  $A \uparrow B$  nur dann falsch, wenn  $A$

und  $B$  beide wahr sind. Eine einfache Negation liefert nun  $A \wedge B$ , und wie man eine Negation mittels Nands ausführt, wissen wir ja schon.  $A \wedge B$  ist demnach äquivalent zu  $(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$ .

- Für  $A \vee B$  werden wir zumindest zwei Ausdrücke  $X_1$  und  $X_2$  mittels Nand verbinden müssen –  $X_1 \uparrow X_2$ .  $A \vee B$  darf nur dann falsch sein, wenn  $A$  und  $B$  beide falsch sind. Nach den Regeln für Nand dürfen  $X_1$  und  $X_2$  nur in diesem Fall *beide wahr* sein. Dies erhält man aber genau mittels Verneinung, also etwa mit  $X_1$  als  $A \uparrow A$  und  $X_2$  als  $B \uparrow B$ . Insgesamt erhält man demnach  $(A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$ .

Zusammenfassend sehen wir

$$\neg A \Leftrightarrow (A \uparrow A)$$

$$A \vee B \Leftrightarrow ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B))$$

Sagt man, *es gibt* ein  $x$ , das  $A$  erfüllt, so muss  $A$  für zumindest eines der in Frage kommenden Objekte wahr sein. Das ist das Kennzeichen einer **Existenzaussage**.

**Beispiel** Existenzaussagen sind

- „Es gibt eine gerade Zahl, die durch drei teilbar ist.“
- „Es gibt eine Möglichkeit, einen Kreis mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat umzuwandeln.“
- „Es gibt Wolken, die aussehen wie Schafe.“ ◀

Wenn eine Aussage  $A$  für *alle* Objekte einer Art gelten soll, dann darf es kein erlaubtes  $x$  geben, dass  $A$  nicht erfüllt. Hier haben wir es mit einer **Allaussage** zu tun.

**Beispiel** Allaussagen sind

- „Alle Primzahlen, die größer sind als zwei, sind ungerade.“
- „Alle Dreiecke sind gleichseitig.“
- „Alle Mathematiker sind schlecht im Kopfrechnen.“ ◀

Für Existenz- und Allaussagen gibt es eine formale Schreibweise, die wir wegen ihrer weiten Verbreitung an dieser Stelle erwähnen wollen, die wir in diesem Buch aber nicht benutzen werden. Diese Schreibweise macht Gebrauch von **Quantoren**, die die Gültigkeit von Aussagen *quantifizieren* sollen.

Die beiden wichtigsten sind

- **Existenzquantor**  $\exists$   
„ $\exists x : A(x)$ “ ist gleichbedeutend mit  
„Es existiert ein  $x$ , für das  $A(x)$  wahr ist“.

■ **Allquantor**  $\forall$

„ $\forall x : A(x)$ “ ist gleichbedeutend mit  
„Für alle  $x$  ist  $A(x)$  wahr“.

**Achtung:** Eine Existenzaussage von der Form „Es gibt ein  $x$ , für das  $A$  gilt“ bedeutet, dass *zumindest* ein derartiges  $x$  existiert.  $A$  darf aber auch für mehrere oder sogar alle möglichen  $x$  wahr sein. Meinen wir, dass es *genau ein* entsprechendes Objekt geben soll, also *eines und nur eines*, so müssen wir das auch dazusagen. Wie auch überall sonst in Mathematik und Logik müssen wir die Sprache ernst nehmen und sauber einsetzen.

Quantoren samt Variablen kann man nun miteinander und mit Junktoren zu vielfältigen Aussagen zusammensetzen. Sehr oft hat man es dabei auch mit dem Fall zu tun, dass mehrere Quantoren verschachtelt sind. Dadurch kommt es zu Abhängigkeiten, die unbedingt zu beachten sind.

**Beispiel** Wir betrachten die Aussage „Zu jeder reellen Zahl  $x$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , die größer als  $x$  ist“. Hier haben wir zunächst eine Allaussage, der eine Existenzaussage folgt. Die Gesamtaussage ist in diesem Fall wahr.

Würde man einfach naiv die Quantoren umstellen, so erhielte man „Es gibt eine natürliche Zahl  $n$ , die größer ist als jede reelle Zahl  $x$ “. Das ist eine ganz andere Aussage als vorhin. In diesem Fall ist sie zudem falsch.

Die Reihenfolge der Quantoren spielt hier, wie fast immer, eine entscheidende Rolle. ◀

## Übersicht: Logik – Junktoren und Quantoren

Wir fassen hier die wichtigsten Junktoren und Quantoren noch einmal kurz und übersichtlich zusammen.

### Wichtige Junktoren:

$\neg$ : Negation (nicht)  
 $\wedge$ : Konjunktion (und)  
 $\vee$ : Disjunktion (oder)  
 $\Rightarrow$ : Implikation (wenn-dann)  
 $\Leftrightarrow$ : Äquivalenz (genau-dann-wenn)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Außerdem werden gelegentlich verwendet:

$\uparrow$  (Nand):  $A \uparrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$   
 $\overset{X}{\vee}$  (Xor):  $A \overset{X}{\vee} B \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$

### Einige wichtige logische Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} (A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \\ (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \\ (A \vee B) &\Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) \\ (A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \end{aligned}$$

### Weitere Grundregeln der Logik:

Abtrennregel:  $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$   
 Indirekter Schluss:  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

### Quantoren:

$\exists$ : Existenzquantor (es gibt ein ...)  
 $\forall$ : Allquantor (für alle ...)

### Verneinen von Quantoren:

$\neg(\forall x : A(x))$  ist äquivalent zu  $\exists x : \neg A(x)$   
 $\neg(\exists x : A(x))$  ist äquivalent zu  $\forall x : \neg A(x)$

Existenz- und Allaussagen lassen sich auch verneinen, dabei ändert sich ihr Charakter von Grund auf. Sagen wir, eine Aussage  $A$  trifft nicht auf alle  $x$  zu, so muss es zumindest ein  $x$  geben, für das  $A$  nicht gilt. Umgekehrt, verneinen wir, dass es ein  $x$  gibt, für das  $A$  gilt, muss  $A$  für alle  $x$  falsch sein.

Kurz, die Verneinung einer Allaussage ist eine Existenzaussage, die Verneinung einer Existenzaussage ist eine Allaussage. In formaler Notation liest sich das als:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x : A(x)) &\text{ ist äquivalent zu } \exists x : \neg A(x) \\ \neg(\exists x : A(x)) &\text{ ist äquivalent zu } \forall x : \neg A(x) \end{aligned}$$

### Anwendungsbeispiel

- Wir verneinen die Allaussage „Alle Raben sind schwarz“. Dafür erhalten wir zunächst „Nicht alle Raben sind schwarz“ und aufgelöst „Es gibt einen Raben, der nicht schwarz ist“.
- Wir verneinen die Aussage „Es gibt einen Hund, der alle Menschen beißt“. Hier haben wir es mit einer Existenzaussage zu tun, von der eine Allaussage abhängt. Zunächst einmal können wir die Verneinung natürlich schlicht als „Es gibt keinen Hund, der alle Menschen beißt“ formulieren. Nun machen wir die Verneinung der Existenzaussage explizit und erhalten „Für alle Hunde gilt, dass sie nicht alle Menschen beißen“. Nun können wir auch die Verneinung der ursprünglichen Allaussage durchführen – „Für alle Hunde gilt, dass es einen Menschen gibt, den sie nicht beißen“. Eleganter formuliert, „Zu jedem Hund gibt es einen Menschen, den er nicht beißt“.



**Abbildung 2.7** Die Verneinung von „alle Raben sind schwarz“ kann man ausdrücken als: „Es gibt einen Raben, der nicht schwarz ist.“ Genau genommen handelt es sich hier allerdings um eine Nebelkrähe . . .

Formal könnte man die ursprüngliche Aussage mit  $H$  für Hund und  $M$  für Mensch als

$$\exists H \forall M : H \text{ beißt } M$$

schreiben. Für die Verneinung erhält man letztlich

$$\forall H \exists M : \neg(H \text{ beißt } M).$$

## 2.3 Definition, Satz, Beweis

Wir stellen nun im Einzelnen die wichtigsten Bausteine und Schritte im Formulieren mathematischer Sachverhalte vor. Selbst, wenn man Mathematik vor allem von der Seite des Anwenders sieht, ist es dennoch wichtig, von diesen Strukturen eine gewisse Vorstellung zu haben.

### Axiome und Definitionen geben den Rahmen vor, innerhalb dessen sich eine mathematische Disziplin bewegt

**Axiome**, nach älterer Sprechweise auch *Postulate*, sind bestimmte Aussagen, die von vornherein als wahr vorausgesetzt werden und damit das grundlegende Fundament darstellen, auf dem mathematische Theorien aufbauen. Sie können nicht bewiesen werden – daher soll es sich bei Axiomen um solche Aussagen handeln, die jedem einleuchtend erscheinen.

Verständlicherweise versucht man, die Zahl der Axiome einer Theorie möglichst gering zu halten, und es kann passieren, dass das Ersetzen eines einzelnen Axioms durch ein anderes zu einer deutlich anderen Theorie führt. Ein bekanntes Beispiel ist die Mengenlehre (siehe Abschnitt 2.4), von der es eigentlich viele Varianten gibt, je nachdem, ob man etwa das Wohlordnungaxiom oder die Kontinuumshypothese (siehe Bonusmaterial) als wahr oder als falsch voraussetzt.

Wenn die Axiome gewissermaßen das Spielfeld abstecken und die wichtigsten Grundregeln angeben, ist doch noch immer nicht klar, wer die Spieler sind und wie der Ball aussieht – wenn es überhaupt einen gibt. In diese Bresche springen die Definitionen.

Denn während meist (aber bei weitem nicht immer!) klar ist, wovon alltägliche Aussagen handeln, sieht die Sache in einer so exakten Disziplin wie der Mathematik ganz anders aus. Natürlich sind viele mathematische und geometrische Begriffe eng an Alltagserfahrungen angelehnt.

Dennoch muss man schon ganz zu Anfang sauber klären, was man etwa unter einem „Punkt“, einem „Kreis“ oder einer „natürlichen Zahl“ versteht. Alle „realen“ Objekte können nur eine mehr oder weniger gute Näherung darstellen.

Durch Definitionen werden die Begriffe festgelegt, mit denen man später arbeiten kann. Im Gegensatz zu einer Aussage kann eine Definition nicht wahr oder falsch sein, wohl aber mehr oder weniger sinnvoll.

Was eine Definition auf jeden Fall erfüllen muss, sind die Forderungen von **Widerspruchsfreiheit** und **Wohldefiniertheit**. Klar, denn natürlich darf sich eine Definition nicht selbst *ad absurdum* führen. Die Definition muss eindeutig sein, und bei allen verwendeten Begriffen muss klar sein, worauf sie sich beziehen.

Neben diesen beiden Kriterien muss eine sinnvolle Definition allerdings noch ein drittes erfüllen – **Zweckmäßigkeit**. Alle

drei Bedingungen sind nicht trivial. Bei manchen wichtigen Begriffen, etwa dem der komplexen Zahlen aus Kapitel 5, hat es sehr lange gedauert, bis eine saubere, widerspruchsfreie und zweckmäßige Definition gefunden war.

Ein historisch interessantes Beispiel, das die Bedeutung von Axiomen und Definitionen schön illustriert, ist jenes des *fünftens Postulats*, das im Bonusmaterial diskutiert wird.

### Sätze sind zentrale Inhalte und Werkzeuge in der Mathematik

Naturgemäß sind wahre Aussagen für Anwender meist interessanter als falsche. Aussagen, die nicht nur wahr sind, sondern auch weitreichende Konsequenzen haben, werden in der Mathematik gerne als *Sätze* bezeichnet.

**Beispiel** Der Satz des Pythagoras ist dafür ein Musterbeispiel, denn dieser stellt eine Aussage über *alle* ebenen rechtwinkligen Dreiecke dar, die zahllose Anwendungen nicht nur in der Geometrie selbst, sondern auch in anderen Disziplinen der Mathematik, der Technik und den Naturwissenschaften hat.

Hingegen besitzt eine Aussage wie etwa „ $1 < 2$ “, obwohl zweifellos richtig, wohl kaum genug Tragweite, um als Satz bezeichnet zu werden.

Sätze werden für uns quasi die Werkzeuge sein, mit denen wir ständig agieren werden. Zu wissen, welche grundlegenden Sätze in der Mathematik zur Verfügung stehen und wie man sie anwendet, ist ein zentrales Ziel, das dieses Buch vermitteln will.

**Kommentar:** Sätze, die nicht besonders wichtig sind oder nur dazu dienen, einen anderen Satz zu beweisen, werden oft *Lemmata* (Einzahl *Lemma*, griechisch für Weg) oder schlicht *Hilfssätze* genannt. Ein Satz, der unmittelbar aus einem anderen folgt, wird oft als *Korollar* oder *Folgesatz* bezeichnet. Eine Aussage, von der man zwar annehmen kann, sie sei richtig, weil es viele Anzeichen gibt, die dafür sprechen, die aber noch nicht bewiesen werden konnte, nennt man eine *Vermutung*.

### Erst der Beweis macht einen Satz zum Satz

Von jeder Aussage, die als Satz in Frage kommen soll, muss klar sein, dass sie wahr ist – sie muss sich hieb- und stichfest *beweisen* lassen. Tatsächlich ist das Führen der Beweise zugleich die wichtigste und die anspruchsvollste Tätigkeit in der Mathematik – Kern und Seele dieser Wissenschaft.

Das Finden komplexer Beweise ist ein höchst kreativer Prozess. Es steckt durchaus ein Körnchen Wahrheit in jenem Ausspruch des großen Mathematikers David Hilbert, der, nach einem ehemaligen Schüler gefragt, geantwortet haben

soll: „Er ist Schriftsteller geworden. Für die Mathematik hatte er zu wenig Fantasie.“

Natürlich gibt es einige oft bewährte Vorgehensweisen, und meist entwickelt man für einfache Probleme irgendwann einen gewissen Instinkt. Beides kann allerdings gründlich daneben gehen – die Mathematik wäre nicht auch nur annähernd so aufregend und manchmal frustrierend, wenn es anders wäre.

Einige sehr wesentliche Techniken, Sprech- und Schreibweisen werden wir hier noch kurz vorstellen. In späteren Kapiteln werden einige weitere folgen, so etwa die vollständige Induktion in Abschnitt 3.5.

Betonen wollen wir an dieser Stelle allerdings noch den formalen Rahmen, an den man sich beim Führen von Beweisen im Idealfall halten sollte. Dabei werden zunächst einmal die Voraussetzungen festgehalten, anschließend wird die entsprechende Behauptung formuliert, und erst dann beginnt der eigentliche Beweis.

Tatsächlich werden die Voraussetzungen sehr oft in die Behauptung eingeschlossen, zumindest diese sollte aber sauber formuliert sein, bevor der eigentliche Beweis erfolgt.

Da das Ende eines Beweises für Außenstehende nicht immer auf den ersten Blick zu erkennen ist, kennzeichnet man es häufig mit „w. z. b. w.“ (was zu beweisen war), „q. e. d.“ (quod erat demonstrandum) oder einfach mit einem Kästchen „■“.

Insgesamt haben wir folgende Struktur:

- Voraussetzungen: ...
- Behauptung: ...
- Beweis: ... ■

### Der indirekte Beweis ist eine zentrale, fast universell einsetzbare Beweistechnik

Viele Beweise kann man *direkt* führen. Immer dann, wenn man eine Formel so umformt, dass man letztlich eine wahre Aussage erhält, ist man den direkten Weg gegangen.

Insbesondere haben interessante Aussagen häufig die Form  $A \Rightarrow B$ , also „aus  $A$  folgt  $B$ “. Bei einem direkten Beweis zeigt man in diesem Fall, dass sich aus den Voraussetzungen  $A$  unmittelbar die Folgerungen  $B$  ergeben.

Oft ist diese direkte Methode aber nicht anwendbar oder mit großen Schwierigkeiten verbunden. Dann bietet sich eine Vorgehensweise an, die in vieler Hinsicht gerade konträr zum direkten Beweis ist – der **indirekte Beweis**.

Logisch äquivalent zur Behauptung  $A \Rightarrow B$  ist, wie man leicht nachprüfen kann,  $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ . Der Beweis für  $A \Rightarrow B$  ist demnach auch erbracht, wenn man zeigen kann, dass aus der Annahme, die Folgerungen seien nicht erfüllt, folgt, dass auch die Voraussetzungen nicht erfüllt sein können.



Zeigen Sie die Äquivalenz

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

mithilfe einer Wahrheitstafel.

Man nimmt also an,  $\neg B$  sei wahr und zeigt, dass sich daraus zwangsläufig  $\neg A$  ergibt. Was hier nach einem formalen Trick aussehen mag, besitzt tatsächlich eine bestechende Logik.

**Beispiel** Betrachten wir etwa  $A$ : „es hat geregnet“ und  $B$ : „die Straße ist nass“. Die Implikation  $A \Rightarrow B$  bedeutet damit: „Wenn es geregnet hat, dann ist die Straße nass.“



**Abbildung 2.8** Die Straße ist nass. Hat es geregnet?

Wenn die Straße nass ist, muss das umgekehrt nicht bedeuten, dass es geregnet hat, es gibt ja auch die Straßenreinigung, über die Ufer getretene Flüsse oder überlaufende Badewannen.

Was wir aber sicher sagen können, ist, dass wenn die Straße *nicht* nass ist, es auch nicht geregnet haben kann. Das ist genau  $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ . ◀

Eine wichtige Variante des indirekten Beweises ist der **Widerspruchsbeweis**, auch als *reductio ad absurdum* bekannt. Dabei versucht man eine Folgerung der Art „ $A \Rightarrow B$ “ zu beweisen, indem man  $A \wedge (\neg B)$  annimmt und daraus einen Widerspruch herleitet.

Die Anwendung aller drei Techniken wird in der Box auf Seite 24 demonstriert.

Zwei weitere berühmte und wichtige Beispiele für Widerspruchsbeweise sind im Folgenden angeführt.

**Beispiel** Die Wurzel aus zwei ist keine rationale Zahl, d. h. nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar.

Wir setzen  $x = \sqrt{2}$  bzw. fordern, dass  $x^2 = 2$  und  $x$  positiv ist. Unsere Aussagen sind

$$\underbrace{x = \sqrt{2}}_A \Rightarrow \underbrace{x \neq \frac{a}{b}}_B, \quad a, b \text{ ganze Zahlen.}$$