

Zeitsparende Algorithmen und Symmetrien

Die dritte Folge des Flohmarkt-Reports stellt den Turbofloh vor und zeigt, wie der Programmierer fast zum Künstler wird.

Birds – do it
bees – do it
even educated fleas – do it
let's do it!

Cole Porter
»Paris«



CHRISTOPH POPPE

Es ist über eine Neuzüchtung zu berichten, die für das mühsame Geschäft der Mandelbrot-Flohforschung einen enormen Fortschritt bedeutet: den Turbofloh.

Im ersten Teil dieser Serie habe ich über einen Besuch in einem Flohmarkt besonderer Art berichtet; die Flöhe taten dort das, was in der Theorie der Julia- und Mandelbrot-Mengen die Iterationsfunktion f tut. Das Verhalten der Flöhe nach zahlreichen aufeinanderfolgenden Sprüngen in einer Ebene oder – was dasselbe ist – das Verhalten für große n der Folge z_n , definiert durch $z_{n+1} = f(z_n)$, bestimmt, wie der zum Anfangspunkt z_0 (für Julia-Mengen) beziehungsweise zum Parameter c (für Mandelbrot-Mengen) gehörige Punkt gefärbt wird.

Im zweiten Teil habe ich dann beschrieben, wie man die anschauliche Vorstellung von den Flöhen in ein Computerprogramm umsetzen und zur Verfertigung ansprechender Bilder verwenden

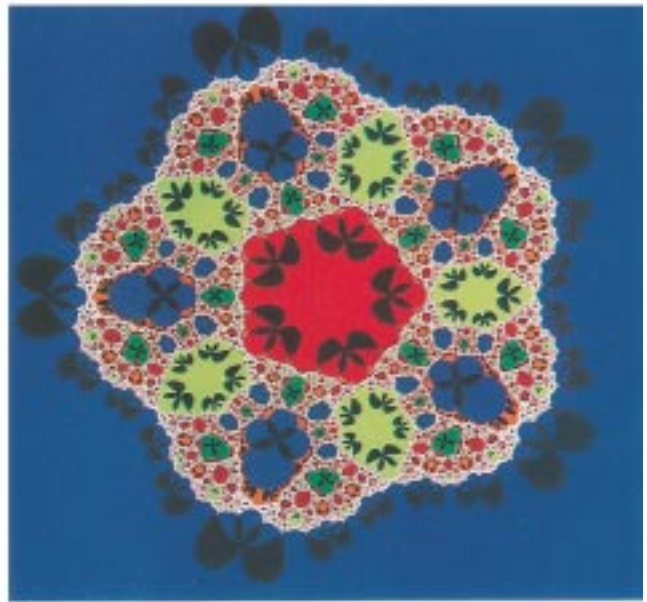
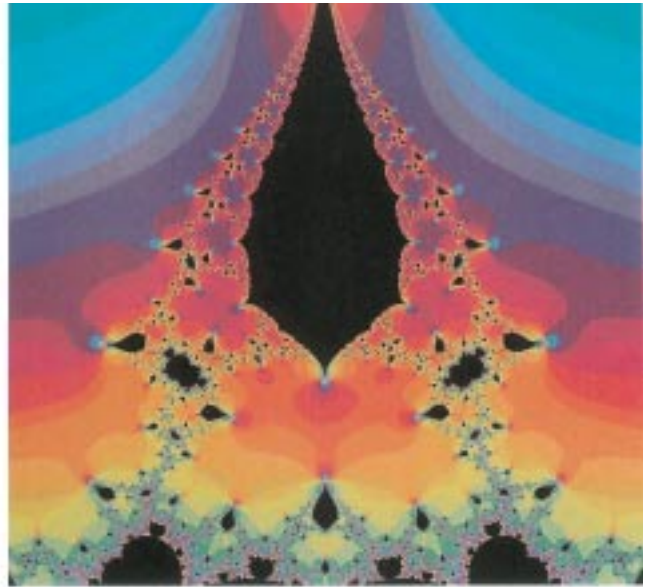
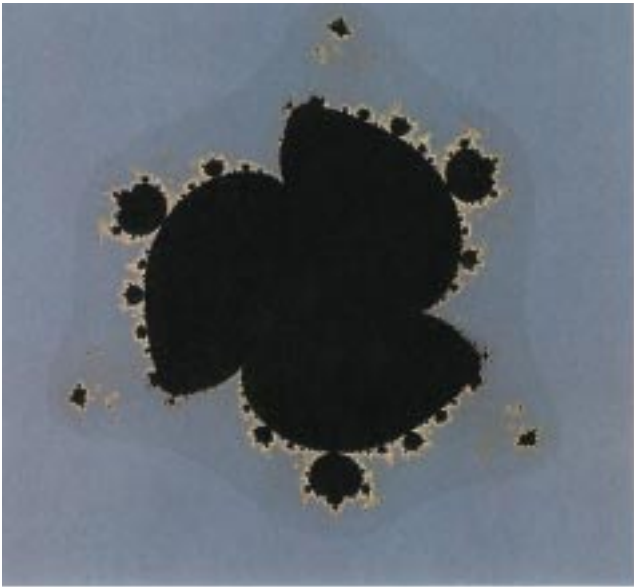
kann. Insbesondere sollte ein Punkt als zur ausgefüllten Julia-Menge beziehungsweise zur Mandelbrot-Menge gehörig angesehen werden, falls der Floh nach einer gewissen Anzahl von Sprüngen (typischerweise 50) noch nicht vom Tisch gefallen war. Die Entscheidung, wie ein Punkt einzufärben ist, kostet daher dann am meisten (Rechen-)Zeit, wenn der Floh tatsächlich alle 50 Sprünge zu absolvieren hat. Ein Programm, welches das Apfelmännchen zeichnen soll, verbringt aus diesem Grund den größten Teil seiner Zeit in dessen dickem Bauch – eine Zeitverschwendung, die den Programmierer mit gutem Grund ungeduldig machen kann.

Rationalisierung des Hüpfens

Eine Lösung des Problems kann darin bestehen, sich das Verhalten des Flohs näher anzusehen: Wenn er offensichtlich auf der Stelle hüpfet oder eine Folge von

Punkten immer wieder durchläuft, muß man nicht bis zum bitteren Ende warten, sondern kann beim Einsetzen eines solchen periodischen Verhaltens den Floh vorzeitig vom Tisch nehmen. Wie \triangleright

▶ **Obere Reihe: Mandelbrot-Mengen zu $f(z) = z^7 + (3/5 + 4/5i)z^4 + c$ (links) und zu $f(z) = z^3/(z^2 + 1) + c$ (rechts; kleiner Ausschnitt). Die erste Iterationsfunktion ist so gewählt, daß das Bild möglichst unsymmetrisch ist. Mittlere Reihe und unten links: Julia-Mengen zu der rationalen Iterationsfunktion $f(z) = (z^k + c)/(z^k + 1)$ mit Pickover-Tisch, $k = 4$, $c = -0,7 + 0,7i$ (Mitte links); $k = 5$, $c = -0,7$ (Mitte rechts); $k = 3$, $c = -1$. Der Exponent k bestimmt die (vier-, fünf- beziehungsweise dreizählige) Drehsymmetrie des Bildes; die beiden letzten Bilder sind zusätzlich spiegelsymmetrisch, weil c eine reelle Zahl ist. Unten rechts: Periodische Julia-Menge zur periodischen Iterationsfunktion $f(z) = \sin z + c$, $c = i$.**



OBERE REIHE: GUNNAR DIETZ; WOLFRAM SCHENK; ALLE ANDEREN: CHRISTOPH PÖPPE

▷ der dient die Zahl der bis dahin vollführten Sprünge zur Färbung des Ausgangspunkts, wodurch die Mandelbrot-Menge auch im Inneren eine farbenfrohe Struktur erhalten kann.

Ein zwar nicht färbendes, aber schnelles und elegantes Verfahren beruht darauf, daß zumindest die geläufigen Mandelbrot- und ausgefüllten Julia-Mengen keine Löcher haben, sondern einfach zusammenhängend sind: Wenn die Punkte irgendeiner geschlossenen Kurve zur Menge gehören, dann gilt gleiches auch für alle von der Kurve umschlossenen Punkte. Ein Floh, der zunächst sorgfältig den Rand der Menge abgrast, wäre sodann berechtigt, ohne weitere Nachprüfung ihr Inneres mit einem Schlag einzufärben.

Züchten wir in einem ersten Gedankenschritt eine Art Universalfloh, der dem geplagten Forscher den größten Teil seiner mühseligen Dokumentationsarbeit abnimmt. Dieser Floh kann nicht nur hüpfen, sondern auch schleichen: Mit der Beharrlichkeit einer Schildkröte betritt er einen Punkt des auf den Tisch gezeichneten Rechteckgitters (ein Pixel) nach dem anderen, setzt an jedes neu betretene Pixel eine Duftmarke und beginnt seine Hüpfserie unter Verwendung der Anfangswerte beziehungsweise Parameter, die zu dem soeben bedufteten Punkt gehören.

Wenn er vom Tisch zu springen droht oder seine Geduld nach 50 Sprüngen erschöpft ist, führt ihn seine Nase untrüglich an seinen Ausgangspunkt zurück. Diesen versieht er vermittelt einer Farbdrüse mit einer Farbe, die der Anzahl seiner Sprünge entspricht, schleicht einen Schritt nach rechts zum nächsten Pixel weiter und vollführt dort dasselbe Spiel. Wenn er am rechten Ende des Tisches angekommen ist, springt er wie die Mechanik einer Schreibmaschine ein Feld nach unten und bis zum linken Rand. Auf diese Weise kann ein fleißiges Tierchen im Alleingang die Arbeit erledigen, für die zuvor ein geduldiger Forscher viel Zeit und ein Backblech voller Flöhe benötigte.

Symmetrien

Das Herumspielen mit den verschiedensten Iterationsfunktionen und den zugehörigen Parametern macht zwar viel Spaß, und jedes neu entstehende Bild kann eine neue Überraschung bringen; nur wird sich irgendwann der Wunsch

regen, die Form eines Bildes gezielt zu beeinflussen – nicht gerade in dem Ausmaß, wie der Künstler den Pinsel beherrscht, aber doch ein Stück weit in dieser Richtung. Einige Hinweise mögen hilfreich sein.

Alle klassischen (zur Iterationsfunktion $f(z) = z^2 + c$ gehörigen) Julia-Mengen sind punktsymmetrisch: Aus einer Drehung um 180 Grad um den Nullpunkt gehen sie unverändert wieder hervor. Wenn c eine reelle Zahl ist, dann sind sie obendrein spiegelsymmetrisch zur reellen Achse. Ebenso kann man das klassische Apfelmännchen an der reellen Achse spiegeln. Wie ist das zu erklären?

Zu jedem Absprungpunkt eines Flohs ist zwar der Auftreffpunkt eindeutig bestimmt, nicht jedoch umgekehrt. Es können sehr wohl zwei (oder mehr) Flöhe verschiedener Herkunft auf demselben Punkt landen; von da an sind ihre Hüpfwege identisch und dementsprechend auch die Farben ihrer Ausgangspunkte. Etwas formaler ausgedrückt: Wenn es zu jedem Absprungpunkt z einen Partnerpunkt z' gibt, so daß die zugehörigen Auftreffpunkte identisch sind: $f(z) = f(z')$, dann bleibt das Bild unverändert, wenn man jedes z durch sein z' ersetzt. Im Jargon: Die Abbildung $z \mapsto z'$ ist eine Symmetrie des Bildes. Für die klassische Iterationsfunktion kann man $z' = -z$ setzen, denn $z^2 + c = (-z)^2 + c$; und die Abbildung von z auf $-z$ ist gerade die Halbdrehung um den Nullpunkt.

Die oben angesprochene Spiegelsymmetrie um die reelle Achse ist etwas anders zu erklären: Setzt man hier einen Floh auf irgendeinen Punkt der Ebene und einen zweiten auf dessen Spiegelbild, so werden ihre Hüpfbahnen auf ewig symmetrisch verlaufen. Es kommt nicht darauf an, ob man zuerst hüpfet und dann spiegelt oder umgekehrt; oder, allgemeiner ausgedrückt, wenn es eine Abbildung h (beispielsweise die Spiegelung an der reellen Achse) gibt, so daß $h(f(z)) = f(h(z))$ gilt, dann ist h eine Symmetrie des Bildes.

Gunnar Dietz und Wolfram Schenk aus Hamburg haben im Rahmen einer „Jugend forscht“-Arbeit solche Symmetrieuntersuchungen in größerer Allgemeinheit durchgeführt (Bild Seite 43 oben).

Auf der Suche nach Funktionen, die mehrere Flöhe auf einen Punkt schicken

▷ Julia-Mengen zu $f(z) = z^k/\cos z + c$; $k = 5$, $c = -1$ (links oben), $k = 4$, $c = 0,5$ (rechts oben). Mandelbrot-Menge zu $f(z) = z^2 + g(c)$, $g_1(c) = \tan c_1$, $g_2(c) = \tan c_2$ (links unten); die beiden (reellen) Tangensfunktionen erzwingen Periodizität in waagerechter wie in senkrechter Richtung. Beim »Kirchenfenster« (rechts unten) wurde g nicht auf c , sondern auf $c + 1/c$ angewandt. Durch die Kehrwertbildung wird das Innerste zäußerst gewendet und umgekehrt; dadurch häufen sich die zuvor weit außen liegenden Bildelemente in der Nähe des Mittelpunkts. Die beiden unteren Computergraphiken sind von Michael Michelitsch.

und entsprechend symmetrische Bilder erzeugen, stößt man zunächst in Verallgemeinerung der klassischen Funktion auf solche, in denen die Variable z in der k -ten Potenz vorkommt. Hier geraten jeweils k Flöhe auf einen Punkt. Der Floh, der im Punkt z abspringt, vereinigt sich mit allen Flöhen, die in den Punkten uz abspringen. Dabei darf man für u eine k -te Einheitswurzel einsetzen; das heißt, die Multiplikation mit u entspricht einer Drehung um den k -ten Teil des Vollwinkels oder ein Vielfaches davon. Somit zeigen die entstehenden Bilder eine k -zählige Drehsymmetrie (Bild Seite 43, mittlere Reihe sowie links unten).

Es ist ganz reizvoll, die Hüpfwege der Flöhe rückwärts zu verfolgen. Man setze sich in Gedanken auf einen Punkt des Tisches. Diesen kann man von k verschiedenen Punkten aus mit einem Sprung erreichen, jeden dieser Punkte seinerseits von k Punkten aus und so weiter. Aus Gründen, die hier nicht ein weiteres Mal erläutert werden sollen, kann man schöne Bilder und möglicherweise auch Julia-Mengen erreichen, wenn man dieses Verfahren weit genug treibt (siehe Seite 27).

Periodische Symmetrien

Die Funktionen Sinus und Cosinus sind periodisch: Sie nehmen für alle Zahlen, die sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, denselben Wert an. Dasselbe gilt für die mit diesen eng verwandte komplexe Exponentialfunktion mit $2\pi i$ statt 2π . Damit werden durch eine einzige Anwendung einer solchen Funktion theoretisch unendlich viele Flöhe gleichgeschaltet, die



OBERE REIHE: CHRISTOPH POPPE, UNTERE REIHE: MICHAEL MICHELITSCH

im Abstand von 2π auf einer horizontalen Geraden sitzen – in der Praxis immerhin so viele, wie nebeneinander auf den Tisch passen. Entsprechend wiederholt sich das Muster einer Julia-Menge tapetenartig: Translation um 2π ist eine Symmetrie des Bildes (Bild Seite 43 rechts unten).

Wenn man die beiden Arten der Symmetrieezeugung – durch Potenzen und durch Winkelfunktionen – kombiniert, ist das Endergebnis im allgemeinen weder translations- noch rotations-symmetrisch. Es bleibt jedoch eine angenäherte Rotationssymmetrie (Bild

der auf dieser Seite oben). Das ist dadurch zu erklären, daß in der Nähe des Nullpunkts $\cos z$ annähernd dieselben Werte annimmt wie $1 - z^2$ und $\sin z$ durch z approximiert wird; es handelt sich um die ersten Glieder der Taylor-Entwicklung.

Bei den Mandelbrot-Mengen kann man durch einen einfachen Trick Symmetrie erzwingen: Anstelle des Parameters c selbst setzt man in die Iterationsfunktion ein $g(c)$ ein. Wenn die Funktion g dann mehrere c -Werte auf ein und dieselbe Zahl abbildet, werden die entsprechenden Punkte der Ebene

gleich gefärbt; eine Symmetrie von g wird zu einer Symmetrie des Gesamtbildes.

Es kann auch sehr reizvoll sein, das ganze Bild einer (nicht notwendigerweise symmetrieezeugenden) Transformation zu unterwerfen, als würde man den Teig für das Mandelbrot noch einmal auf ganz spezielle Weise kneten, nachdem die Flöhe bereits ausgebrütet und damit auf ihren c -Wert konditioniert sind (Bilder auf dieser Seite unten). Insbesondere kann man so gleichsam die Unendlichkeit in die Nähe eines Punktes zwingen. ◁