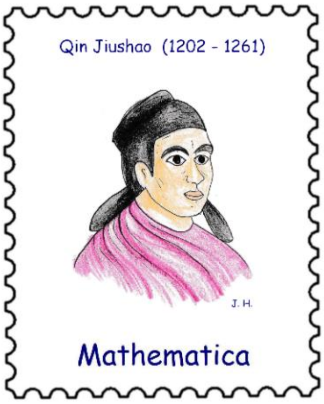
Juli 2022

Vor 800 Jahren lebte **QIN JIUSHAO** (1202 – 1261)



QIN JIUSHAO wird 1202 als Sohn eines höheren Beamten in der Provinz Sichuan im Südwesten Chinas geboren. Mit 17 Jahren meldet er sich freiwillig zur Armee und ist an einem Einsatz beteiligt, durch den ein Aufstand niedergeschlagen wird.

Nach der Versetzung des Vaters nach Hangzhou, der im Westen Chinas gelegenen Hauptstadt des Reichs der Song-Dynastie, nimmt der Sohn die Möglichkeiten wahr, Mathematik und Astronomie zu studieren.

1226 kehrt QIN JIUSHAO mit seinem Vater wieder zurück in die Heimat, wo er seine Studien fortsetzen kann. Wer in den Staatsdienst eintreten will, muss Prüfungen in sechs Disziplinen absolvieren, eine davon ist die Mathematik. Grundlage für das siebenjährige Studium der anwendungsorientierten Inhalte sind die sog. *Neun Kapitel mathematischer Kunst* (*Jiuzhang suanshu*), die vom 2. Jahrhundert v. Chr. an zusammengestellt und ergänzt wurden, u. a. durch LIU HUI (220-280) und ZU CHONGZHI (429-501).

Im Unterschied zu seinen Mitstudenten, die die ihnen vermittelten Methoden auswendig lernen, um die Prüfungen zu bestehen, durchschaut QIN JIUSHAO die mathematischen Methoden. Seine Begabung zeigt sich nicht nur in der Mathematik, sondern gleichermaßen auch in der Dichtkunst, der Musik und der Architektur. Und gleichzeitig gilt der unbeherrschte und unberechenbare junge Mann als hervorragender Reiter, Fechter und Bogenschütze. Als die mongolischen Heere des DSCHINGIS KHAN die Provinz Sichuan bedrohen, wird er Befehlshaber einer Einheit zur Verteidigung des Landes.

QIN JIUSHAO wird in verschiedenen Provinzen mit Verwaltungsaufgaben betraut, die er ohne jegliche Rücksichtnahme wahrnimmt, sodass es sogar zu einem Aufstand gegen ihn kommt. Dass er durch illegalen Verkauf von Salzvorräten zu großem Reichtum gelangt, tut seiner Karriere im Staatsdienst keinen Abbruch. Kurz nachdem er 1244 einen wichtigen Posten am kaiserlichen Hof in der Hauptstadt Nanjing angetreten hat, erreicht ihn die Nachricht vom Tod seiner Mutter.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

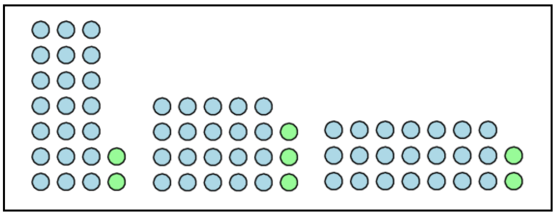
Während der traditionellen dreijährigen Trauerzeit verfasst QIN JIUSHAO das Meisterwerk *Shushu jiuzhang* (Mathematische Abhandlung in neun Kapiteln), das 1247 erscheint. Es ist sicherlich kein Zufall, dass es genau *neun* Kapitel sind (außerdem in jedem Kapitel *neun* ausgewählte Aufgaben), entspricht dies doch – bis auf die Reihenfolge der Themen – dem Werk seines großen Vorbilds LIU HUI.

1254 kehrt QIN JIUSHAO für einige Monate wieder in den Staatsdienst zurück. Sein Einsatz als Gouverneur in einer südlichen Provinz im Jahr 1259 wird nach 100 Tagen wegen Amtsmissbrauchs beendet; das durch Bestechung erworbene neue Vermögen sichert ihm weitere finanziell unbeschwerte Jahre. Bereits im folgenden Jahr gelingt es ihm erneut, mit einem Verwaltungsposten betraut zu werden – als Mitarbeiter seines Freundes WU QIAN, der als Marineoffizier tätig ist. Nach der Entlassung WU QIANs aus dem Staatsdienst wird QIN JIUSHAO nach Meixian in der südchinesischen Provinz Guangtong versetzt, wo er 1261 stirbt.

Der Buchdruck war im 7. Jahrhundert in China erfunden und im 11. Jahrhundert zu einem Druck mit beweglichen Lettern weiterentwickelt worden. Warum QIN JIUSHAOs Werk – im Unterschied zu vielen anderen Büchern dieser Zeit – nicht gedruckt wurde, lässt sich nicht mehr klären. Das Buch wurde oft vervielfältigt und verbreitete sich auch in Japan und Korea. Die heute vorliegende Fassung entstand 1842 – rekonstruiert aus einer koreanischen Kopie.

Im ersten Kapitel des *Shushu jiuzhang* beschäftigt sich QIN JIUSHAO mit einer Klasse von Problemen, die zum ersten Mal vom chinesischen Mathematiker SUN ZI (400-460) beschrieben wurden:

- *Eine unbekannte Anzahl von Objekten ist gegeben. Bei einer 3er-Zählung bleiben 2 übrig, bei 5er-Zählung 3 und bei 7er-Zählung 2. Wie viele Objekte sind es?*



In moderner Schreibweise notiert: Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n mit $n \equiv 2 \pmod 3 \wedge n \equiv 3 \pmod 5 \wedge n \equiv 2 \pmod 7$.

SUN ZI gab zur Bestimmung der gesuchten Zahl das folgende Verfahren an:

Multipliziere die Anzahl der übrig gebliebenen Objekte bei der 3er-Zählung mit 70, addiere dazu das Produkt der Anzahl der übrig gebliebenen Objekte bei der 5er-Zählung mit 21 und addiere dann noch das Produkt der Anzahl der übrig gebliebenen Objekte bei der 7er-Zählung mit 15.

Die kleinste infrage kommende Anzahl an Objekten ergibt sich, indem man von dem Ergebnis ein möglichst großes Vielfaches von $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ subtrahiert. Hier also:

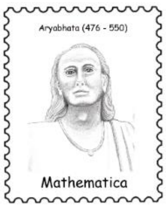
$n = 2 \cdot 70 + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 - 2 \cdot 105 = 23$.

Die Faktoren 70, 21, 105 ergeben sich dabei aus den folgenden Bedingungen:

$70 \equiv 1 \pmod 3 \wedge 70 \equiv 0 \pmod 5 \wedge 70 \equiv 0 \pmod 7$, $21 \equiv 1 \pmod 5 \wedge 21 \equiv 0 \pmod 3 \wedge 21 \equiv 0 \pmod 7$,

$15 \equiv 1 \pmod 7 \wedge 15 \equiv 0 \pmod 3 \wedge 15 \equiv 0 \pmod 5$.

Dieses hier im Beispiel beschriebene Verfahren ist allgemein anwendbar, wenn die betrachteten Moduln *paarweise zueinander teilerfremd* sind. Aufgaben dieses Typs finden wir 100 Jahre später dann auch bei ARYABHATA und 750 Jahre danach bei LEONARDO VON PISA (FIBONACCI).



Qin Jiushao gilt als der erste Mathematiker, der Aufgaben auch für den Fall löst, dass die Moduln *nicht* paarweise zueinander teilerfremd sind. Das von ihm entwickelte

Verfahren wird in der Fachliteratur als *Chinesischer Restsatz* bezeichnet. 500 Jahre später wird die Methode Qin Jiushaos von Leonard Euler wieder entdeckt und 1801 von Carl Friedrich Gauss in seinen *Disquisitiones* abschließend behandelt.

Eine der Aufgaben von Qin Jiushao lautet wie folgt:

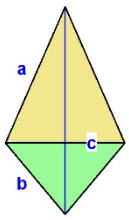
- *Drei Bauern (A, B, C) ernten auf ihren Feldern jeweils die gleichen Mengen an Reis. Diesen bieten sie an verschiedenen Orten zum Kauf an; dort gelten jeweils unterschiedliche Volumeneinheiten.*
  A verkauft seinen Reis auf dem offiziellen Markt seiner eigenen Präfektur, wo in Einheiten von 1 hu = 83 sheng gemessen wird; ihm blieben 32 sheng übrig. B bietet seinen Reis den Dorfbewohner von Anji an; dort wird in Einheiten von 1 hu = 110 sheng gerechnet. Er hat danach noch 7 tou (= 70 sheng) übrig. C verkauft seinen Reis an einen Zwischenhändler aus Pingjiang, wo eine Einheit 1 hu = 135 sheng entspricht; er hat noch 3 tou (= 30 sheng) übrig.
  Wie viel Reis hatte jeder Bauer ursprünglich und wie viel hat jeder verkauft?

Lösung: Jeder der drei Bauern hatte 2460 *tou* (= 24600 *sheng*) Reis geerntet. A konnte 296 *hu* von jeweils 83 *sheng* verkaufen, also 24568 *sheng*, und hatte 32 *sheng* übrig. B verkaufte 223 *hu* von jeweils 110 *sheng*, also 24530 *sheng*, und es blieben ihm 70 *sheng*. C verkaufte 182 *hu* von jeweils 135 *sheng*, also 24570 *sheng*, und hatte 30 *sheng* übrig.

Das zweite Kapitel des *Shushu jiuzhang* enthält Aufgaben über „Himmelserscheinungen“, das sind Probleme, die mit astronomischen Rechnungen zu tun haben wie beispielsweise Bestimmung von Schattenlängen an bestimmten Orten oder Sichtbarkeitsphasen des Jupiters, aber auch mit Niederschlagsmessungen.

Im dritten Kapitel beschäftigt sich Qin Jiushao mit Flächenbestimmungen. Für die Lösung der ersten Aufgabe, der Flächenbestimmung eines Drachenvierecks, gibt er eine bemerkenswerte Beziehung an:

- *Für den Flächeninhalt* $X = \sqrt{A} + \sqrt{B}$ *der rechts abgebildeten Figur gilt eine Gleichung 4. Grades* $-X^4 + 2 \cdot (A+B) \cdot X^2 - (A-B)^2 = 0$, *wobei durch* $A = (a^2 - (\frac{c}{2})^2) \cdot (\frac{c}{2})^2$ *und* $B = (b^2 - (\frac{c}{2})^2) \cdot (\frac{c}{2})^2$ *jeweils das Quadrat des Flächeninhalts der beiden Teilflächen berechnet wird.*



Diese biquadratische Gleichung gilt übrigens auch für den Flächeninhalt X eines Kreisrings, wobei mit A, B die Quadrate der Flächeninhalte des äußeren bzw. des inneren Kreises bezeichnet sind.

Für den Flächeninhalt S eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c gibt Qin Jiushao die Formel $S = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot [c^2 \cdot a^2 - (\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$ an – dies ist nichts anderes als die Heron'sche Formel.

Auch entwickelt er eine Formel, mit der man den Flächeninhalt eines Vierecks aus den Längen der vier Seiten und einer der Höhen ermitteln kann.

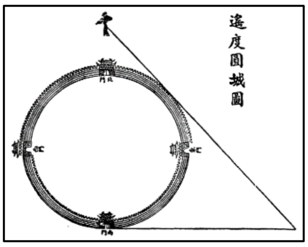
Im vierten Kapitel beschäftigt sich Qin Jiushao mit der Bestimmung von Entfernungen von unzugänglichen Punkten. In diesem Zusammenhang betrachtet er eine Aufgabe, zu der er vermutlich durch ein Problem aus *Jiuzhang suanshu* angeregt wurde.

Dort heißt es:

- *Bei einer Stadt mit quadratischem Grundriss steht in einer Entfernung von 20 bu vom Nordtor ein Baum. Geht man vom südlichen Stadttor 14 bu nach Süden und dann um 1775 bu nach Westen, dann sieht man den Baum hinter der nordwestlichen Ecke der Stadtmauer.*

QIN JIUSHAOs Aufgabe lautet:

- *Eine kreisförmig ummauerte Stadt mit unbekanntem Durchmesser hat Tore in den vier Himmelsrichtungen. Drei Li nördlich des Nordtors steht ein Baum. Wenn man sich umdreht und unmittelbar nach dem Verlassen des südlichen Tors neun Li in Richtung Osten geht, kommt der Baum gerade in Sicht. Bestimme den Umfang und den Durchmesser der Stadtmauer.*



Ohne weitere Kommentare und Hinweise gibt QIN JIUSHAO an, dass das Problem auf die Gleichung $x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x^2-34992=0$ führt, also eine Gleichung 10. Grades, wobei er den Durchmesser mit x^2 bezeichnet. Die Lösung lautet: $x^2=9$.

Die Kapitel 5, 6, 7 und 8 enthalten ähnliche Aufgaben, wie sie bereits in *Jiuzhang suanshu* enthalten sind, u. a. zu den Themen

- *Steuern*: Berechnung der Steuerlast;
- *Geld*: Bestimmung des Umtauschkurses von Papiergeld (Papiergeld wurde in China erfunden, ausgegeben wurde es zum ersten Mal im Jahr 1024, als das Münzgeld knapp wurde), Kosten für den Transport von Getreide;
- *Festungsbau und Gebäude*: Materialaufwand für den Bau einer Festung, Aushub für den Bau eines Kanals, Anlegen eines Deichs;
- *Militär*: Planung von Armeelagern und Schlachtformationen.

Am Ende des achten Kapitels findet man die folgende Aufgabe:

- *In einem Warenlager ist eine gewisse Anzahl von Baumwoll-Ballen gelagert, aus denen eine bestimmte Anzahl von Armeeuniformen hergestellt werden soll. Nimmt man jeweils 8 Ballen, um Kleidung für 6 Soldaten herzustellen, dann fehlen 160 Ballen. Nimmt man jeweils 9 Ballen, um Kleidung für 7 Soldaten herzustellen, dann bleiben 560 Ballen übrig. Gesucht ist die Anzahl der Baumwoll-Ballen und die Anzahl der Soldaten, die eingekleidet werden sollen.*

Bezeichnet man mit der Variablen x die Anzahl der Ballen und mit y die Anzahl der Soldaten, dann ergeben sich die beiden Gleichungen $x=\frac{y}{6}\cdot 8-160 \wedge x=\frac{y}{7}\cdot 9+560$. Diese führen zu der Lösung x = 20000 und y = 15120. QIN JIUSHAO löst die Aufgabe in einer allgemeinen Form, die an die CRAMER'sche Regel erinnert (benannt nach GABRIEL CRAMER, 1704-1752). Ein solcher allgemeiner Ansatz wird danach erst wieder durch den japanischen Mathematiker SEKI KOWA (1642-1708) veröffentlicht, der zehn Jahre vor GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ die Determinanten-Methode entwickelt.

Im neunten Kapitel werden Probleme untersucht, die mit dem Handel von Waren zu tun haben und auf lineare Gleichungssysteme führen.

- *Ein Händler schließt drei Geschäfte ab, die jeweils einen Betrag von 1.470.000 kuan umfassen. Beim ersten kauft er 3500 Bündel Wolle, 2200 chin* (Pfund) *Schildpatt und 375 Kisten Weihrauch, beim zweiten 2970 Bündel Wolle, 2130 chin Schildpatt und 3056 ¼ Kisten Weihrauch, beim dritten 3200 Bündel Wolle, 1500 chin Schildpatt und 3750 Kisten Weihrauch. Welchen Wert hat jeweils ein Bündel Wolle, ein chin Schildpatt und eine Kiste Weihrauch?*

Das Problem lässt sich als lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen darstellen. QIN JIUSHAO notiert die Koeffizienten in Tabellenform (s.u. Mitte) und löst das System durch elementare Spaltenumformungen – so wie wir es vom GAUSS'schen Eliminationsverfahren kennen. (Lösung: $x = 300$, $y = 180$, $z = 64$)

Die Rechnungen mit den Koeffizienten werden dabei mithilfe des in China üblichen Abakus, des sog. *suanpan*, durchgeführt. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass QIN JIUSHAO in den Tabellen der Zwischenschritte als Erster einen kleinen Kreis als Symbol für die Null notiert, während bis dahin solche Stellen einfach nur frei gelassen wurden.

$$\begin{aligned} 3500x + 2200y + 375z &= 1470000 \\ 2970x + 2130y + 3056\tfrac{1}{4}z &= 1470000 \\ 3200x + 1500y + 3750z &= 1470000 \end{aligned}$$

1470000	1470000	1470000
3200	2970	3500
1500	2130	2200
3750	$3056\frac{1}{4}$	375

Der *suanpan* wird auch beim Lösen von Gleichungen höheren Grades verwendet, selbst bei quadratischen Gleichungen. Das hierfür verwendete Verfahren wird in unserem Kulturraum nach dem Vorschlag von AUGUSTUS DE MORGAN üblicherweise als HORNER-Schema bezeichnet – benannt nach dem englischen Mathematiker WILLIAM GEORGE HORNER, der diese Methode im Jahr 1819 der *Royal Society* vorlegte (zehn Jahre zuvor hatte sie bereits der italienische Mathematiker PAOLO RUFFINI veröffentlicht).

Beispiel: Durch Ausprobieren findet man heraus, dass eine Lösung der Gleichung $1x^3 + 3x^2 - 5x - 12 = 0$ zwischen 2 und 3 liegt. Daher liegt es nahe, den Ansatz $1 \cdot (2+y)^3 + 3 \cdot (2+y)^2 - 5 \cdot (2+y) - 12 = 0$ zu machen.

Den links stehenden Term kann man mithilfe binomischer Formeln ausrechnen und gelangt dann zu $1y^3 + 9y^2 + 19y - 2 = 0$. Diese Gleichung hat eine Lösung, die im Intervall [1 ; 2] liegt. Wenn man Dezimalzahlen vermeiden will, kann man y durch $10y'$ ersetzen, also die Gleichung $1000y'^3 + 900y'^2 + 190y' - 2 = 0$ untersuchen und findet heraus, dass diese eine Lösung hat, die im Intervall [1 ; 2] liegt, d. h., die Ausgangsgleichung hat eine Lösung im Intervall [2,1 ; 2,2] usw.

Die Ausgangsgleichung kann aber auch in der Form $(1 \cdot (x+3) \cdot x - 5) \cdot x - 12 = 0$ notiert werden. Um Werte des links stehenden Terms zu bestimmen, müssen keine Potenzen, sondern nur abwechselnd Summen und Produkte gebildet werden. Auch das Ersetzen der Variablen x durch $y + 2$ ist weniger aufwendig:

$$(1 \cdot ((y+2)+3) \cdot (y+2) - 5) \cdot (y+2) - 12 = 0$$

Die Umformungen lassen sich mithilfe des rechts abgebildeten Schemas schnell durchführen:

$$\begin{aligned} &(1 \cdot ((y+2)+3) \cdot (y+2) - 5) \cdot (y+2) - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &(1 \cdot (y+5) \cdot (y+2) - 5) \cdot (y+2) - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &(1 \cdot (y+5+2) \cdot y + 10 - 5) \cdot (y+2) - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &(1 \cdot (y+7) \cdot y + 5) \cdot (y+2) - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &(1 \cdot (y+7+2) \cdot y + 5 + 14) \cdot y + 10 - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &(1 \cdot (y+9) \cdot y + 19) \cdot y - 2 = 0 \end{aligned}$$

1	3	-5	-12
	2	10	10
1	5	5	**- 2**
	2	14	
1	7	**19**	
	2		
1	**9**		