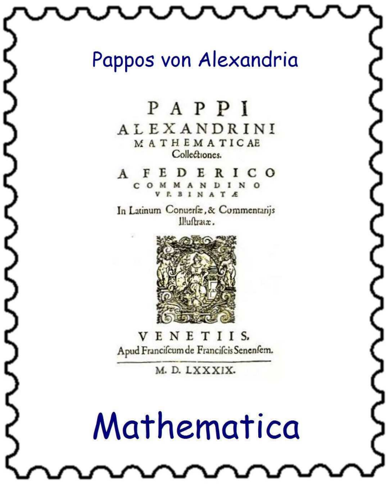
November 2016

Vor 1700 Jahren lebte PAPPOS VON ALEXANDRIA (um 320 n. Chr.)



PAPPOS VON ALEXANDRIA gilt als der letzte der großen griechischen Geometer. Über sein Leben weiß man fast nichts – noch nicht einmal, wann er genau gelebt hat. Der einzige historische Verknüpfungspunkt ist ein von ihm verfasster Kommentar zu einer Sonnenfinsternis, die er selbst in Alexandria beobachtete, und die man durch eine kürzlich durchgeführte Berechnung auf Oktober 320 terminieren kann. Bekannt ist, dass er in Alexandria lebte und dort eine „Schule" (Akademie) leitete.

Sein Hauptwerk trägt den Titel *Synagoge* (Sammlung) und bestand aus acht Büchern. Es stellt den gelungenen Versuch dar, die klassische Geometrie der Griechen wieder zu beleben. Dabei ging es PAPPOS offensichtlich nicht darum, die Bücher der „Alten" zu ersetzen, sondern die Bedeutung dieser Bücher (die damals wohl noch alle existierten) wieder ins Bewusstsein zu bringen und um Einsichten zu ergänzen, die nachträglich von anderen Gelehrten hinzugefügt worden waren. Die Sammlung enthält auch einige Hinweise auf Schriften von Autoren, von deren Existenz wir sonst möglicherweise nichts erfahren hätten. Die erste Übersetzung der *Synagoge* ins Lateinische erfolgte 1589 durch FEDERICO COMMANDINO, aber es dauerte dann noch einmal einige Jahrzehnte, bis RENÉ DESCARTES, PIERRE DE FERMAT und ISAAC NEWTON die Bedeutung des Werks erkannten und zur Grundlage ihrer eigenen Forschungen machten.

Buch I über Arithmetik ging vollständig verloren, von Buch II ist nur ein Teil vorhanden (das Fragment wurde 1688 von JOHN WALLIS in der *Savillan Library* in Oxford entdeckt). Es beschäftigt sich mit einem Problem der Unterhaltungsmathematik: Im antiken Griechenland wurden Ziffern durch Buchstaben dargestellt, u. a. in der *milesischen Notation*, vgl. Tabelle. Das Produkt der Zahlwerte der einzelnen Buchstaben eines Textes kann dabei leicht sehr große Werte annehmen, wie APOLLONIUS in einer nicht überlieferten Abhandlung untersucht hatte.

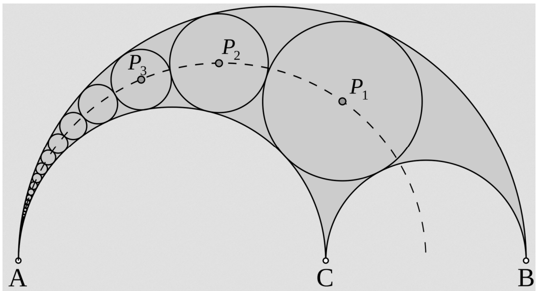
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Buch III besteht aus vier Teilen. Zunächst werden Konstruktionen zum arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel erläutert. Im letzten Teil zeigt er, wie die fünf PLATONischen Körper in eine Kugel einbeschrieben werden können (abweichend von der Methode EUKLIDs in seinen *Elementen*).

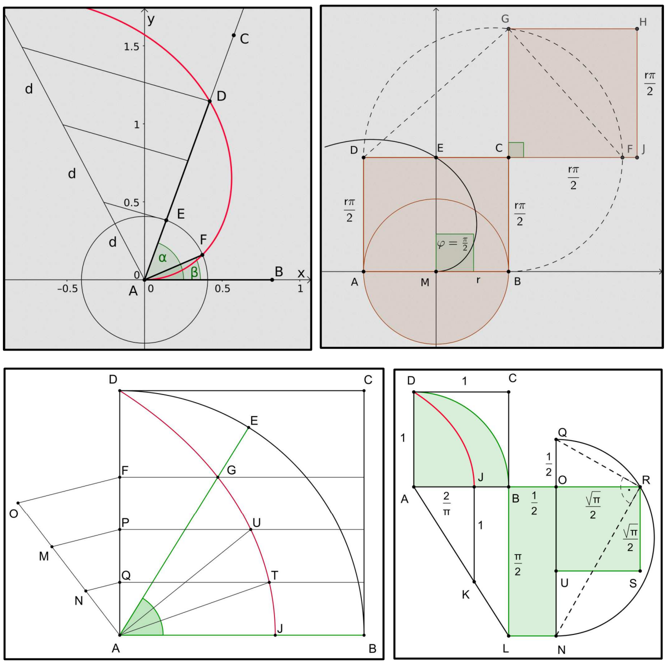
Buch IV beschäftigt sich zunächst mit einer Verallgemeinerung des Satzes von PYTHAGORAS (für beliebige Parallelogramme über den Seiten). Dann folgen Variationen der *Arbelos* des ARCHIMEDES (vgl. Briefmarke aus Italien mit den Zwillingskreisen).

Er entdeckt eine besondere Eigenschaft einer Kette von Kreisen – heute werden sie als PAPPOS-Ketten bezeichnet: Gegeben sind drei Halbkreise über einer Strecke AB mit einem beliebigen Zwischenpunkt C. Dann existiert ein Kreis k_1 mit Mittelpunkt P_1, der diese drei Halbkreise berührt. Der Durchmesser des Kreises k_1 ist genauso groß wie der Abstand des Punktes P_1 von der Strecke AB. Der Kreis k_2 mit Mittelpunkt P_2 berührt die Halbkreise über AB und AC sowie den Kreis k_1; dessen Durchmesser ist halb so groß wie der Abstand von P_2 von AB. … Der Durchmesser des Kreises k_3 um P_3 ist ein Drittel so groß wie der Abstand von P_3 zu AB usw.



(Abb. Wikipedia commons, Pbroks13)

Im Folgenden untersucht er die Frage der Quadratur des Kreises sowie das Problem der Winkeldreiteilung und beschreibt u. a. die Lösungen mithilfe der ARCHIMEDischen Spirale und der Quadratrix des HIPPIAS.



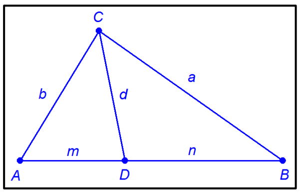
(Abb. Wikipedia commons, Kmhkmh)

Buch V beschäftigt sich mit isoperimetrischen Problemen: PAPPOS erläutert, warum der Kreis unter allen Figuren gleichen Umfangs den größten Flächeninhalt hat. Weiter vergleicht er die Volumina der 13 halbregulären archimedischen Körper mit gleich großer Oberfläche miteinander, wobei er schließlich feststellt, dass von zwei Körpern mit gleicher Oberfläche derjenige mit der größeren Anzahl von Flächen auch das größere Volumen hat und dass bei einer Kugel mit gleicher Oberfläche das Volumen größer ist als bei allen regelmäßigen Körpern. In einem Beitrag von literarischer Qualität lobt er die *Klugheit der Bienen* wegen der optimalen Form der Honigwaben.

In Buch VI setzt PAPPOS sich mit Schriften verschiedener Autoren zur Astronomie auseinander – von THEODOSIOS über ARISTARCH bis PTOLEMÄUS – und weist dabei auf Fehler hin, die in der Zwischenzeit entdeckt worden waren.

Buch VII ist – nicht nur aus heutiger Sicht – das wertvollste Kapitel der *Synagoge*. Zunächst reflektiert Pappos die Vorgehensweise der Mathematiker; dabei unterscheidet er *Analysis* und *Synthesis*: Bei der Methode der *Analysis* (wenn man z. B. versucht, einen Satz zu beweisen oder ein Konstruktionsproblem zu lösen) wird überlegt, von welchen Voraussetzungen her man auf das schließen kann, was gezeigt werden soll, und geht dann immer weiter zurück, bis man zu einem Sachverhalt kommt, der sicherlich richtig ist. Bei der *Synthesis* geht man den umgekehrten Weg.

Das Kapitel enthält eine Fülle an Informationen über verloren gegangene Bücher, u. a. über Euklids *Data* und *Porismen* (Sammlung von geometrischen Aufgaben) sowie mehrere Schriften des Apollonius (*Buch der Flächenzerlegungen*, *Buch der Berührungen*, *Buch der Neigungen*, *Buch der geometrischen Örter*).

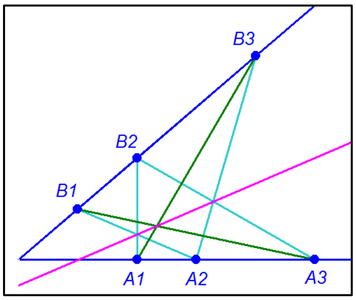


Bemerkenswert ist z. B. der folgende Satz (auch als *Satz von* Stewart bezeichnet): Wird die Strecke AB in einem Dreieck ABC durch einen Punkt D geteilt mit $m = |AD|$, $n = |DB|$ und $d = |DC|$, dann gilt: $m \cdot a^2 + n \cdot b^2 = (m+n) \cdot d^2 + m \cdot n^2 + n \cdot m^2$

Buch VII enthält auch zwei Sätze über Rotationskörper, die als *Guldin'sche Regeln* bekannt wurden:

- Rotiert ein Kurvenstück um eine Achse (die von der Kurve nicht geschnitten wird), dann ist der Flächeninhalt der Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers gleich der Länge des Kurvenstücks multipliziert mit dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt des Kurvenstücks bei der Rotation zurücklegt.
- Rotiert ein Flächenstück um eine Achse (die das Flächenstück nicht schneidet), dann ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers gleich dem Produkt des Flächeninhalts des Flächenstücks multipliziert mit dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt des Flächenstücks bei der Rotation zurücklegt.

Ob tatsächlich der Jesuit Paul Guldin, ein in der Schweiz geborener Mathematiker und Astronom, den Satz 1640 selbst entdeckt hat, ist ungeklärt – in seiner Bibliothek befand sich ein Exemplar der *Synagoge* des Pappos.



Als *Theorem des* Pappos wird ein Satz bezeichnet, der Ausgangspunkt für die Entwicklung der *Projektiven Geometrie* war: Liegen je drei Punkte A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 auf zwei Geraden, dann liegen die drei Schnittpunkte der Geraden, die durch A_1 und B_2 bzw. A_2 und B_1, durch A_1 und B_3 bzw. A_3 und B_1 sowie durch A_2 und B_3 bzw. A_3 und B_2 verlaufen, auf einer Geraden, der sogenannten Pappos-Gerade.

Buch VIII schließlich beschäftigt sich mit Problemen der Mechanik; er gibt eine Definition des Schwerpunkts, untersucht Zahnräder sowie die Situation an einer Schiefen Ebene, erläutert, wie man zu fünf gegebenen Punkten den zugehörigen Kegelschnitt konstruiert, und setzt sich mit der Heron'schen Theorie der mechanischen Kräfte auseinander. – Pappos verfasste auch einen Kommentar zum *Almagest* des Ptolemäus; allerdings sind nur seine Erläuterungen zu den Büchern V und VI erhalten. Ob ein (in arabischer Übersetzung erhaltener) Kommentar zu Euklids Elementen tatsächlich von Pappos stammt, ist umstritten, weicht der Stil doch allzu sehr von dem seiner *Synagoge* ab.