Wie „sichtbar“ ist die Sichtbarkeitsgrenze?
Anmerkungen zum Olbers’schen Paradoxon

WOLFGANG ILLIG

1. Einleitung

Dieser kleine Text wurde angeregt durch den Vortrag „*Warum ist es nachts dunkel?*“, gehalten von Dr. Torsten Lisker vom Zentrum für Astronomie der Uni Heidelberg innerhalb der Vortragsreihe „Halbe Heidelberger Sternstunden“ in der Peterskirche am 10.5.2011, der das Olbers’sche Paradoxon behandelte und im Internet als Video [2] vom Spektrumverlag zur Verfügung steht. Um einen Aspekt dieses Paradoxons zu beleuchten wurde die Sichtbarkeitsgrenze eingeführt und zum besseren Verständnis zunächst auf den Wald und dann auf den Himmel angewandt, ohne die Formeln dafür anzugeben. Eine kurze Plausibilitätsbetrachtung führte unter idealisierten Bedingungen auf eine Formel, die die im Vortrag genannten Ergebnisse überraschend exakt reproduzierte. Das erweiterte Vortragsskript von Rainer Göhring [1], das auch der Vortragende als Quelle angab, verwendet die gleichen Formeln zur Berechnung der Sichtbarkeitsgrenze.

Die in der Plausibilitätsbetrachtung abgeleiteten Formeln nur als Näherung anzusehen, begründet sich damit, dass Bäume oder Sterne in realen Wäldern oder am Himmel zufällig verteilt sind und nicht wie „Perlenschnüre“ aufgereiht den Wald (wenn man von Monokulturen absieht) oder das Firmament füllen. Simulationen mit dem CAS *Mathematica*, mit dem gleichmäßig verteilte Wälder mit den im Vortrag angegebenen Parametern erzeugt wurden, zeigten erwartungsgemäß, dass die Sichtbarkeitsgrenze in der Realität zum Teil durchsichtig ist und lieferten zudem eine Häufigkeitsverteilung, die als Maß für die Undurchsichtigkeit genutzt werden kann. Eine statistische Analyse kommt zu dem Ergebnis, dass die „reale“ Sichtbarkeitsgrenze um den Faktor 3 bis 5 größer ist, je nach dem, ob der Wald zu 95 % oder zu 99 % undurchsichtig sein soll. Die Sichtbarkeitsgrenze ist grob nur zu 65 % „zu sehen“ oder anders formuliert: Auf Höhe der Sichtbarkeitsgrenze ist es möglich bei etwa 35 % des dortigen Sichtfeldes ins „Jenseits“ der Sichtbarkeitsgrenze zu blicken. Damit wird die obige „Überraschung“ klar. Mit Sichtbarkeitsgrenze ist keine Grenze im exakten Wortsinn gemeint, sondern ein statistisch definierter Begriff; sie ist ein Erwartungswert. Der Weg dorthin und einige Anmerkungen und Ergänzungen sind der Inhalt dieses Textes.

2. Das Olbers’sche Paradoxon

Der deutsche Arzt und Astronom Heinrich Wilhelm Olbers (1758–1840) stellte sich die Frage: „Warum ist es nachts dunkel?“ Nicht gemeint ist damit die Antwort: „Weil die Sonne untergegangen ist“. Aus dem damaligen Wissen und den Annahmen über das Weltall folgt, dass der Himmel strahlend hell sein müsste. Ein Blick in den Nachthimmel sagt das Gegenteil. Dies nennt man Olbers’sches Paradoxon.

Die zugrunde liegenden Annahmen sollen anhand der Waldanalogie erläutert werden, bei der einem leuchtenden Nachthimmel ein undurchsichtiger Wald entspricht. Unter welchen Annahmen ist ein Wald undurchsichtig?[1]

- Der Wald soll hinreichend groß und alt sein. Groß, damit überhaupt genügend Bäume zur Verfügung stehen und alt, damit man vom Wald und nicht von einer Schonung sprechen kann.
- Die Bäume sollen im Mittel gleichmäßig verteilt sein. Der Wald soll an jedem Ort und in jeder Richtung gleich aussehen.

[1] Die kosmologischen Annahmen wurden dem Skript [1] inhaltlich, aber nicht wörtlich entnommen und sinngemäß auf den Wald übertragen.

- Die Baumdichte soll sowohl räumlich, als auch zeitlich konstant sein, d.h., die Bäume bleiben stehen und sterben nicht ab.
- Der Wald soll kein Unterholz enthalten, das die in dieser Höhe sonst freie Sicht generell verdeckt.
- Der Waldboden soll flach oder eben sein. Am Fuß eines Berges, wo sein Anstieg beginnt, würde man sonst auf den Boden schauen und hinter dem Berggipfel, wo der Berg wieder abfällt, würde man sonst in den Himmel blicken können.
- Die Erde – als Planet gesehen – bleibt wie sie ist. Ihre Oberfläche dehnt sich nicht aus und Teile der Oberfläche driften nicht großräumig.
- Die den Wald prägenden Gesetze gelten auf der ganzen Erde und ändern sich nicht in der Zeit.

Aus den für den Wald übertragenen Annahmen folgt, dass es in relativ geringer Tiefe des Waldes eine Grenze gibt, hinter die man nicht weiter hineinschauen kann; der Wald wird dort „undurchsichtig". Die entsprechenden Annahmen für das Weltall lauten kurz und bündig:

- Das Weltall ist räumlich und zeitlich unendlich.
- Es gilt das kosmologische Prinzip – der Weltraum ist homogen und isotrop.
- Die mittlere Sternendichte ist räumlich und zeitlich konstant und die Sterne leuchten gleichmäßig und ewig.
- Der interstellare Raum ist leer.
- Der Raumgeometrie ist euklidisch.
- Das Weltall ist statisch, Sterne sind wirklich „Fixsterne".
- Die Gesetze der Physik gelten überall und unveränderlich.

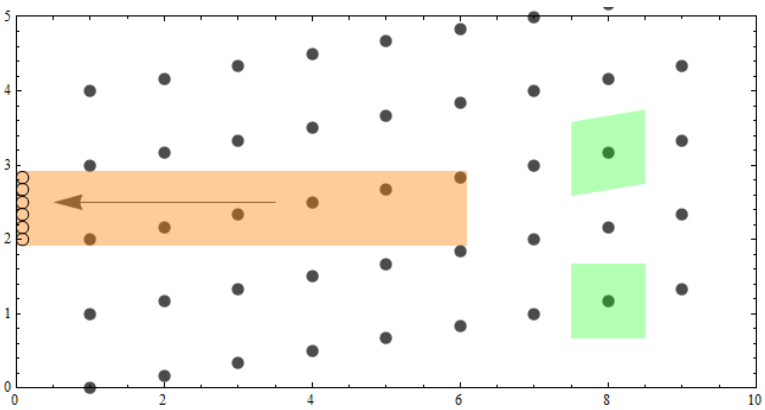
Mit der Annahme, alle Sterne seien „*Sonnen*", schloss Olbers[2],

> *„. . . da müßte der ganze Himmel eben so hell sein wie die Sonne. Denn jede Linie, die ich mir von unserem Auge gezogen denken kann, wird nothwendig auf irgend einen Fixstern treffen, und also müßte uns jeder Punkt am Himmel Fixsternlicht, also Sonnenlicht zusenden".*

Die Lösung des Olbers'schen Paradoxons ist nicht das Thema dieses Textes; es wird sehr ausführlich in [1] behandelt. Hier soll der Zusammenhang mit der Sichtbarkeitsgrenze genauer erörtert werden.

3. Die Sichtbarkeitsgrenze

Bei der Plausibilitätsbetrachtung zur Ableitung der Sichtbarkeitsgrenze geht man hier von einem idealisierten homogenen Wald aus, wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt. Jedem Baum stehe die gleiche – und nicht nur im Mittel – quadratische Fläche A zur Verfügung. Die Bäume sind von links nach rechts in Schichten vom Baumabstand $a = \sqrt{A}$ angeordnet und werden dabei in jeder folgenden Schicht in vertikaler Richtung um einen Baumdurchmesser $d < a$ nach oben verschoben. Dadurch entsteht aus dem Quadrat ein Parallelogramm gleichen Flächeninhaltes, so dass sich durch die Verschiebung an der Homogenität nichts ändert. Horizontal ist dieser idealisierte Wald nach 6 Baumabständen undurchsichtig, in vertikaler Richtung und unter dem Winkel



[2] Das Zitat wurde [1] entnommen.

arctan(d/a) (von der horizontalen Achse aus entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen) bleibt er immer durchsichtig. Der Wald ist also anisotrop, was in der Realität im Allgemeinen nicht zutrifft.

Stellt man sich nun gedanklich auf den linken Bildrahmen zwischen die Koordinaten 2 und 3, so sieht man, dass die Länge a von $b = a/d$ „virtuellen" Bäumen, d.h. durch Projektion erzeugten Schattenbildern, disjunkt und lückenlos überdeckt wird. Beim Blick noch rechts fällt auf, dass genau diese b Bäume mit dem Baumabstand a multipliziert die Sichtbarkeitsgrenze genannte Entfernung s ergeben, bei der in dieser Richtung der Wald auf Höhe der Sichtbarkeitsgrenze (absolut) undurchsichtig wird:

$$s = a \cdot b = \frac{a^2}{d} = \frac{A}{d} . \qquad (1)$$

Die 2-dimensionale Sichtbarkeitsgrenze ergibt sich also aus der Fläche, die einem Baum zur Verfügung steht, dividiert durch den Baumdurchmesser. Im Beispiel aus [1] beträgt der Baumabstand 5 m und der Baumdurchmesser ¼ m; dann passen auf den mittleren Baumabstand 20 Bäume und die Sichtbarkeitsgrenze liegt bei 100 m. Beim Sternenhimmel – im 3-dimensionalen Fall – wird die Dimension der beteiligten Größen um 1 erhöht, und man dividiert in der Idealisierung das Volumen V, in dem *genau ein* Stern „lebt" durch seine Querschnittsfläche:

$$s = \frac{V}{\pi r^2} . \qquad (2)$$

In der Realität sind natürlich Bäume und Sterne nicht systematisch angeordnet, sondern zufällig verteilt, so dass die Anordnung – global gesehen – nicht nur homogen, sondern auch isotrop ist. Erstaunlich ist, dass die abgeleiteten Formeln trotz der starken Vereinfachung dennoch richtig bleiben, sofern man alle Ausgangsgrößen in den Formeln als Mittel- oder Durchschnittswerte auffasst. Damit wird aber auch die Sichtbarkeitsgrenze zu einer mittleren Entfernung oder einem Erwartungswert und nicht zu einer Absolutgrenze, über die man an keiner Stelle hinausschauen kann.

Bei statistischer Betrachtung erhält man die Gleichungen sogar auf einfacherem Wege. Die Idee dazu stammt aus der kinetischen Gastheorie bzw. der statistischen Physik und wird hier auf den Wald „heruntergebrochen". Ausgangspunkt ist wieder die jetzt durchschnittliche quadratische Fläche A für einen Baum von mittlerem Durchmesser d. Das Quadrat „schneidet" man in Streifen der Breite d. Die Gesamtlänge der Streifen ist $\lambda = A/d$. Ein Wanderer, der im Wald diesem gedanklich angelegten Streifen folgt, wird im Mittel, nachdem er die gesamte Streckenlänge λ durchlaufen hat, auf einen Baum gestoßen sein, wo auf diesem Weg ist aber zufallsbestimmt. Mit anderen Worten: Durchquert man mit der „Wirkungsbreite" d (hier Baumstärke) eine Fläche, auf der im Mittel ein Baum steht, so wird man durchschnittlich nach dem Zurücklegen der Strecke λ – auch mittlere freie Weglänge genannt – auf einen Baum stoßen, weil man dann die gesamte Fläche $A = \lambda d$ sozusagen „abgegrast" hat. Im 3-dimensionalen Raum der kinetischen Gastheorie wird aus der Fläche A ein Volumen V bzw. dessen Kehrwert die Teilchendichte $n = N/V_N$, also die Teilchenzahl N pro Volumen V_N und aus dem Baumdurchmesser d wird der Wirkungsquerschnitt σ, eine Fläche, deren Größe in der statistischen Physik ein Maß für die Wechselwirkungs- oder Reaktionsfreudigkeit eines Teilchens ist. Damit folgt:

$$\lambda = \frac{V}{\sigma} = \frac{V_N}{N\sigma} = \frac{1}{n\sigma} .$$

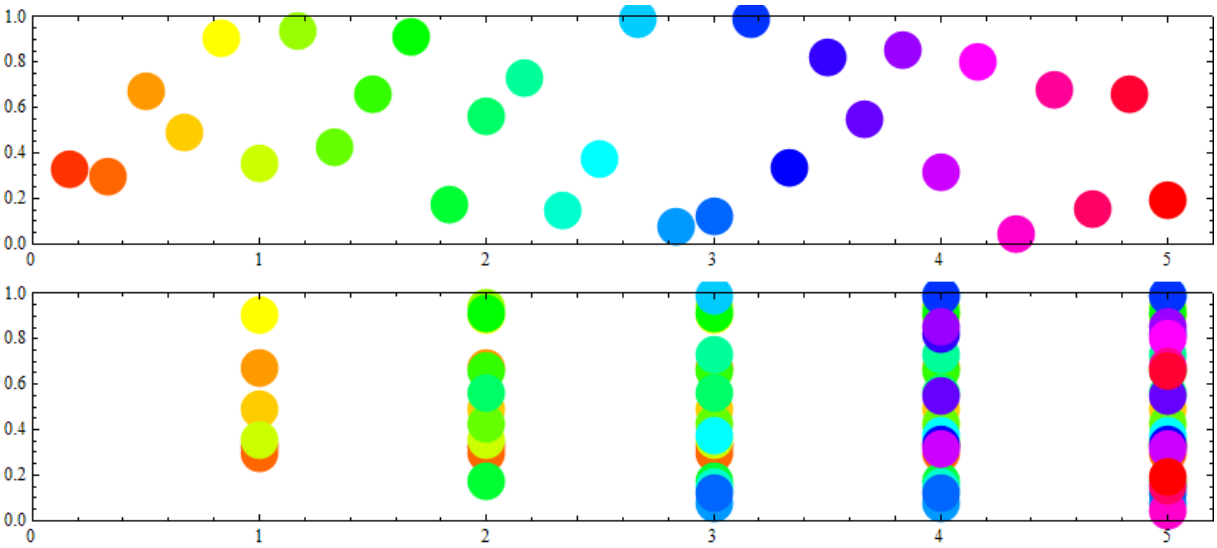
Diese Formel[3] wird auf die Situation beim Olbers'schen Paradoxon übertragen. Aus der Teilchendichte wird die Sternendichte $n = 1/V$ von einem Stern ($N = 1$) pro mittlerem Volumen V, aus dem Wirkungsquerschnitt wird die mittlere Querschnittsfläche eines Sterns $\sigma = \pi r^2$ und die mittlere freie Weglänge λ wird zur Sichtbarkeitsgrenze s.

Die Sichtbarkeitsgrenze ist in den hier betrachteten Fällen (Wald, Sternenhimmel) nichts anderes als eine mittlere freie Weglänge, also ein Mittel- oder Erwartungswert. Erwartungswerte implizieren eine zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung, die im Folgenden bestimmt wird.

[3] In der kinetischen Gastheorie enthält die Formel im Nenner noch einen Faktor √2. Er beschreibt die mittlere Relativgeschwindigkeit des sich bewegenden oder stoßenden Teilchens in Bezug auf die Gasteilchen des Ensembles, wenn die Geschwindigkeit der Teilchen im Gas von vergleichbarer Größe ist, wie die des stoßenden Teilchens. Er entfällt hier, da die stoßenden Partikel sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegende Photonen sind und Sterne im Vergleich dazu ruhen, von Bäumen ganz zu schweigen.

4. Die Verteilungsfunktion

Eine erste Orientierung gewinnt man mit einer Simulation. Dazu wird ein Wald erzeugt von mittlerem Baumabstand a (als Bildbreite) in vertikaler Richtung und von der Tiefe $\tau = 5$ mit der Sichtbarkeitsgrenze s als Einheit senkrecht dazu. Dadurch wird die Abbildung horizontal stark gestaucht, obwohl auch in dieser Richtung der mittlere Baumabstand a beträgt. Hier kommt es aber nur auf die Projektion der Bäume in Richtung der Sichtlinie an, so dass überdies die Bäume nur vertikal gleichverteilt erzeugt wurden. In jeder Tiefenstufe τ – dem τ-fachen der Sichtbarkeitsgrenze – werden b Bäume erzeugt und diese dann kumulativ auf die jeweilige Stufe projiziert, wie im unteren Teil des folgenden Bildes gezeigt. Die im Bild verwendeten Parameter sind $a = 1$, $d = 1/6$, $b = a/d = 6$ und $s = a^2/d = 6$.



Nicht nur bei der Berechnung für diese Grafik, sondern bei einer großen Anzahl von Wiederholungen der Simulation mit den gleichen, als auch mit anderen Parametern ist der Wald an der Sichtbarkeitsgrenze s fast immer und bei der doppelten Entfernung $\tau = 2$ sehr häufig durchsichtig. Bei $\tau = 3$ ist der Wald häufig und bei $\tau > 3$ fast immer undurchsichtig.

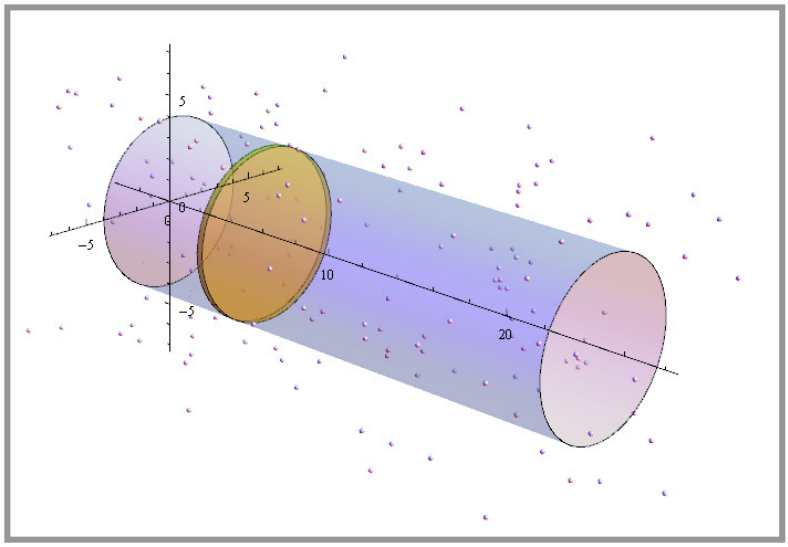
Um dies nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ zu beschreiben und ein Maß der Überdeckung zu finden, genügt es auf jeder Projektionslinie L_τ (der Länge a) τb Bäume – besser deren Schatten – gleichmäßig verteilt „nacheinander" aufzufüllen und zu schauen, welcher Anteil der Projektionslinie durch „Baumschatten" überdeckt wird. Der Überdeckungsgrad wird für jeden Parametersatz 100 000-mal berechnet und daraus der Mittelwert bestimmt. Das Ergebnis zeigt die folgende Tabelle:

Bäume b \ Tiefe τ	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	**Wahrscheinlichkeit p**	
6	0.665102	0.887843	0.962439	0.987421	0.995787	0.998589		
20	0.641514	0.871488	0.953930	0.983485	0.994079	0.997878		
50	0.635830	0.867380	0.951704	0.982412	0.993595	0.997667	$1-\left(1-\frac{1}{b}\right)^{\tau b}$	(3)
100	0.633968	0.866020	0.950959	0.982049	0.993430	0.997595		
100 000	0.632122	0.864666	0.950214	0.981685	0.993262	0.997521		
∞	**0.632121**	**0.864665**	**0.950213**	**0.981684**	**0.993262**	**0.997521**	$1-e^{-\tau}$	(4)

In der Tabelle sind die berechneten Wahrscheinlichkeiten gemäß (3) angegeben, da diese mit den durch Simulation ermittelten Häufigkeiten wegen der großen Anzahl von Wiederholungen praktisch identisch sind. Der Überdeckungsgrad hängt für jede Tiefe τ nur geringfügig von der Baumanzahl b ab, so dass in der praktischen Anwendung einfach mit dem Grenzwert (4) für $b \to \infty$ gerechnet werden kann. Der so ermittelte Überdeckungsgrad der Projektionslinie L_τ der Länge a wird damit zur geometrischen Wahrscheinlichkeit, mit welcher der Wald in einer bestimmten Tiefe τ, dem Vielfachen der Sichtbarkeitsgrenze, undurchsichtig ist.

Im Beispielwald passen $b = 20$ Bäume auf den mittleren Baumabstand a von 5 m und bereits bei 100 Bäumen unterscheiden sich die Werte der diskreten Formel (3) von der stetigen (4) nur noch um ein paar Tausendstel. Beim Sternenhimmel dagegen geht es um ganz andere Größenordnungen. Da nach Olbers *alle Sterne Sonnen sind*, benötigt ein Stern von Sonnenmasse $M = 2\times10^{30}$ kg bei einer

mittleren Baryonendichte[4] von $\rho_b = 4{,}3\times10^{-28}$ kg/m³ ein Volumen $V = M/\rho_b = 5{,}5\times10^{9}$ ly³ um das enthaltene Baryonengas, hauptsächlich Wasserstoff und Helium, in sich zu vereinen. Vergleicht man nun das zwischen 10 und 100 liegende b der Wälder mit der Anzahl der Sterne, die auf einen mittleren Sternabstand von $V^{1/3} = 1765$ Lichtjahren (ly) disjunkt und lückenlos projiziert werden können, so ergibt sich bei einem Sonnendurchmesser von 1,4 Mill. km die gigantische Zahl von rund 12 Mrd. Sonnen. Bei einem adäquaten, die erhöhte Dimension des Sternenhimmels im Vergleich zum Wald berücksichtigenden, Vergleich kommt man sogar auf $1{,}8\times10^{20}$ Sonnen. Praktisch ist dieses b des Himmels nahezu unendlich groß, und es ist deshalb sinnvoll, nur die Formel (4) für die stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung herzuleiten, was in Anlehnung an [8] jetzt geschieht.



Dazu betrachtet man als Teilgebiet des Universums einen mit Sternengas gefüllten Zylinder der Grundfläche F, mit der x-Achse als Symmetrieachse. Seine Grundfläche liege bei $x = 0$ und seine Deckfläche im Unendlichen. Gedanklich zerschneidet man den Zylinder senkrecht zur x-Achse in Scheiben der Fläche F von infinitesimaler Stärke dx. Das garantiert, dass in einer Scheibe sich keine Sternprojektionen in x-Richtung überlappen. Eine solche Scheibe enthält $nFdx$ Sterne, wobei $n = N/V$ die Dichte des Sternengases ist. Die „Scheibensterne“ projiziert man nun wieder auf die Grundfläche des Zylinders, wo sie eine Fläche $\pi r^2 nFdx$ überdecken. Hier ist r der mittlere Sternradius und πr^2 ist die Querschnittsfläche eines mittleren Sterns, die hier zum Wirkungsquerschnitt[5] σ_* wird. Der Anteil dieser Fläche an der Grundfläche F, also der Überdeckungsgrad ist $\sigma_* ndx$ und dies ist auch gleich die Wahrscheinlichkeit, beim „Durchflug“ durch diese infinitesimal starke Zylinderscheibe auf einen Stern zu treffen. Das komplementäre Ereignis, dabei auf keinen Stern zu treffen, besitzt die Wahrscheinlichkeit:

$$w(dx) = 1 - n\sigma_* dx\,. \tag{5}$$

Analog bezeichnet $w(x)$ die Wahrscheinlichkeit beim Durchqueren der Strecke x im Zylinder auf keinen Stern zu treffen, und $w(x + \mathrm{d}x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, sowohl auf dem Weg der Länge x, als auch auf dem zusätzlichen Streckenstück dx auf keinen Stern zu stoßen. Nun gilt nach dem Multiplikationsgesetz für Wahrscheinlichkeiten

$$w(x + dx) = w(x) + \frac{dw(x)}{dx}dx = w(x)\cdot w(dx)\,. \tag{6}$$

Setzt man (5) in (6) ein so *findet* man eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Funktion $w(x)$, die man durch *Trennung der Variablen* und anschließende Integration löst:

---

[4] Die Werte der kosmologischen Parameter stammen aus der WMAP-7-Jahresauswertung [3] oder wurden aus ihnen abgeleitet. Baryonen sind im Wesentlichen Protonen und Neutronen, die Kernbausteine der Elemente des Periodensystems.

[5] Der hier bei Sternen (oder Bäumen) verwendete Wirkungsquerschnitt besitzt nur ¼ der Fläche, wie der von Teilchen in einem Gas der kinetischen Gastheorie, wenn man die Radien der Partikel beider Gasarten auf Einheitslänge skaliert. Dies macht man sich klar, indem man sich das Gas aus harten Kugeln mit Radius r bestehend denkt. Die Mittelpunkte zweier sich berührender Kugeln liegen um $d = 2r$ auseinander, d.h., wenn eine Kugel im Abstand d an einer zweiten vorbei fliegt kommt es beim touchieren gerade noch zu einer Wechselwirkung; bei geringerem Abstand stoßen beide Kugeln „solide“ zusammen. In diesem Fall müssen also die Radien der zwei Teilchen addiert werden, um den Wirkungsquerschnitt einer Kugel festzulegen. Der Mittelpunkt des anderen, nun als punktförmig aufzufassenden, Teilchens kann als harte Kugel niemals in die Deckungssphäre genannte Umgebung vom Volumen $4/3\pi d^3$ des ersten Teilchens eindringen. Die Querschnittsfläche dieser Deckungssphäre ist mit dem Wirkungsquerschnitt identisch. Beim Sternengas gilt prinzipiell das Gleiche, nur dass das stoßende Teilchen ein Photon mit effektivem (d.h. im Vergleich zu einem Stern) Radius 0 ist. Damit gilt für Sterne $d_* = r + 0 = r$ und $d_* = ½d$. Bei der Berechnung des „gestirnten“ Wirkungsquerschnitts ergibt dies den Faktor ¼ – nicht in der entsprechenden Formel, nur beim Vergleich. Um die unterschiedliche Betrachtungsweise hervorzuheben ist das Symbol des Wirkungsquerschnitts σ für Sterne mit * indiziert.

$$w(x)+\frac{dw(x)}{dx}dx = w(x)\cdot(1-n\sigma_* dx) = w(x)-w(x)\,n\sigma_* dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = -n\sigma_*\cdot w(x) \quad \xrightarrow{\text{Trennung der Variablen}}$$

$$\frac{dw}{w} = -n\sigma_* dx \quad \xrightarrow{\text{Integration}}$$

$$\ln w = -n\sigma_* x + c_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$w(x) = c\,e^{-n\sigma_* x}$$

Da $w(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte sein soll, nutzt man die hier diskret formulierte Normierungsbedingung – die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist gleich Eins – zur Bestimmung der Konstanten c. Sie erweist sich als Kehrwert der Sichtbarkeitsgrenze s.

$$1 = \int_0^\infty w(x)dx = c\int_0^\infty e^{-n\sigma_* x}dx = -\frac{c}{n\sigma_*}e^{-n\sigma_* x}\Big|_0^\infty \quad \Rightarrow c = n\sigma_* = \frac{1}{s}\,.$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, die der Sichtbarkeitsgrenze zugrunde liegt bestimmt. Das Integral über die Dichte bis zu einer Entfernung x, also die Summation der Projektionen aller Sterne aus den jeweiligen infinitesimalen Zylinderscheiben bis x auf die Grundfläche, liefert die Verteilungsfunktion $F(x)$:

$$w(x) = \tfrac{1}{s}e^{-\frac{x}{s}}, \qquad F(x) = \tfrac{1}{s}\int_0^x e^{-\frac{\hat{x}}{s}}d\hat{x} = -e^{-\frac{\hat{x}}{s}}\Big|_0^x = 1-e^{-\frac{x}{s}} \overset{x=\tau s}{=} 1-e^{-\tau}\,. \tag{7}$$

Das Ergebnis dieser Rechnung ist die Exponentialverteilung, sie reproduziert für $x=\tau s$ die Formel (4). Das diskrete Analogon dazu ist die geometrische Verteilung, kumulativ beschrieben durch (3) (die Summe der ersten b Einzelwahrscheinlichkeiten).

Es bleibt zu prüfen, ob der Erwartungswert der gefundenen Exponentialverteilung auch der Sichtbarkeitsgrenze bzw. mittleren freien Weglänge entspricht. Eine kurze Rechnung mittels partieller Integration bestätigt dies:

$$\tfrac{1}{s}\int_0^\infty \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-\frac{x}{s}}}_{v'}dx = \tfrac{1}{s}\left[\underbrace{x}_{u}\underbrace{(-s)\,e^{-\frac{x}{s}}}_{v} - \int_0^\infty \underbrace{1}_{u'}\underbrace{(-s)\,e^{-\frac{x}{s}}}_{v}dx\right] = -(x+s)\,e^{-\frac{x}{s}}\Big|_0^\infty = s\,.$$

Der Erwartungswert der hier abgeleiteten Exponentialverteilung beschreibt die Sichtbarkeitsgrenze und darf nicht mit dem mittleren Abstand von Bäumen oder Sternen verwechselt werden.

5. Zusammenfassende Bemerkungen zur Sichtbarkeitsgrenze

Das Ergebnis dieser Rechnung wurde bereits in der Einleitung vorweggenommen. Die *Sichtbarkeitsgrenze* ist keine absolute Größe, wie es der Begriff *Grenze* nahelegen möchte oder wie er meist aufgefasst wird, sondern ein statistischer Erwartungswert, der mit dem Begriff *mittlere freie Weglänge* aus statistischer Sicht besser umschrieben wäre. Bei der Verwendung im Zusammenhang mit einem Wald oder dem Sternenhimmel im Olbers'schen Paradoxon ist allerdings der statistische Begriff mehr oder weniger nichts sagend oder irreführend, so dass Sichtbarkeitsgrenze doch das „kleinere Übel" zu seien scheint.

Die Frage des Titels – *Wie „sichtbar" ist die Sichtbarkeitsgrenze?* – kann so beantwortet werden: Die Sichtbarkeitsgrenze ist nur zu 63 % zu „sehen", sie wird bei dem dreifachen Abstand zu 95 % und bei dem fünffachen Abstand zu 99 % „sichtbar" in Form eines undurchsichtigen Waldes oder eines leuchtenden Sternenhimmels im Olbers'schen Sinne. Nach (7) wird die Sichtbarkeitsgrenze mathematisch streng genommen erst im Unendlichen absolut „sichtbar", praktisch dürfte die dreifache Entfernung das Kriterium der „Sichtbarkeit" erfüllen.

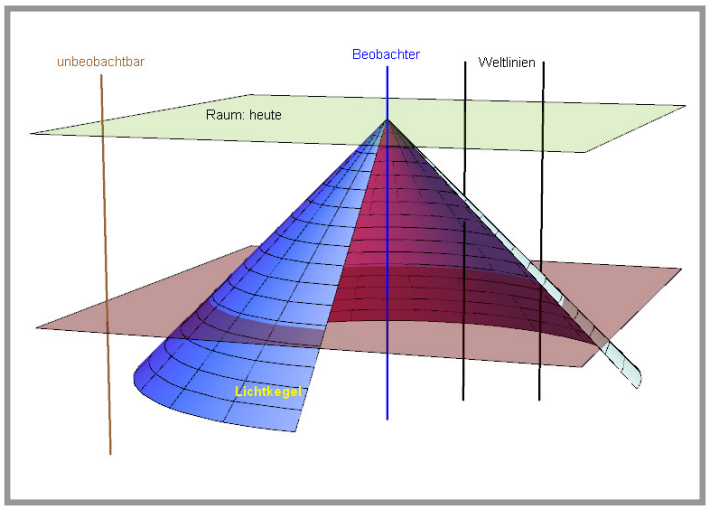
Beim Wald mag sich dieses Ergebnis ja auswirken, dass erst bei einem Vielfachen der Sichtbarkeitsgrenze diese auch praktisch wirksam wird. Es macht doch einen Unterschied, ob der Wald nach 100 m, nach 300 m oder gar erst nach 500 m undurchsichtig wird. Beim Sternenhimmel liegt die Sichtbarkeitsgrenze unter den Annahmen des Olbers'schen Paradoxons und einer Baryonendichte von rund $4{,}3\times10^{-28}$ kg/m³ etwa bei 3×10^{23} Lichtjahren; ein Faktor 3 oder 5 ändert an der wahrhaft astronomischen Zahl nicht viel.

Grundlage dieser Aussagen ist die Verteilung hinter der Sichtbarkeitsgrenze – die Exponentialverteilung (7) mit dem Kehrwert der Sichtbarkeitsgrenze als Parameter. Sie beschreibt sinngemäß, wie häufig Photonen eine Strecke von bestimmter Länge beim Flug durch das Universum zurücklegen müssen, bevor sie auf einen Stern stoßen. Kurze Strecken sind häufiger, lange seltener und im Mittel ist die Strecke von der Länge der Sichtbarkeitsgrenze.

Zum Olbers'schen Paradoxon: Die Sichtbarkeitsgrenze, die eingeführt wurde um das Olbers'sche Paradoxon zu quantifizieren, spielt bei der Lösung des Paradoxons höchstens eine untergeordnete Rolle. Bei einem statischen Universum braucht das Sternenlicht von dieser Grenze etwa 10^{23} Jahre zur Erde, aber unser sichtbarer Teil des Kosmos existiert erst seit rund 14 Milliarden Jahren. Das endliche Alter des Universums und auch das der Sterne würden bereits den leuchtenden Nachthimmel verhindern. Viel gravierender ist die so „dünn gesäte" baryonische Materie in unserer Welt. Sie würde bei ihrer vollständigen Umwandlung in Strahlungsenergie das Weltall gerade mal auf etwa 15 K „aufheizen". Licht braucht aber einige Tausend Kelvin, um sichtbar zu werden. Der letzt genannte Fakt ist die „energetische" und „eigentliche" Lösung des Olbers'schen Paradoxon. Volkstümlich: Es reicht halt nicht, den Himmel hell zu machen.

6. Reale Sichtbarkeitsgrenzen

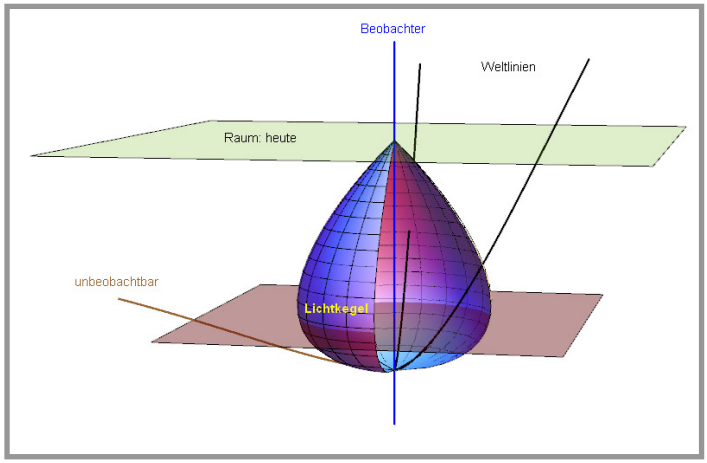
Im heutigen Universum[6] gibt es aber reale Sichtbarkeitsgrenzen mit „Absolutheitsanspruch", die in der Relativitätstheorie Horizonte genannt werden. Visuelle Horizonte sind aus dem täglichen Leben bekannt. So hat beispielsweise auf offener See jedes Schiff seinen eigenen, von der Erdkrümmung hervorgerufenen, Horizont. Schiffe, die sich vom Beobachter entfernen, werden beim Überschreiten dieses Horizontes unsichtbar. Beobachter auf den anderen Schiffen machen die gleiche Beobachtung; sie sehen uns verschwinden. Im Weltall ist es analog, nur nicht so anschaulich, zumindest ohne Kenntnis der Mathematik der Relativitätstheorie – besser: der das All beschreibenden Geometrie. Zusammen mit einem geeigneten Expansionsverhalten des Universums ergeben sich dort die entsprechenden Horizonte. In unserer beschleunigt expandierenden Welt sorgt der Urknall für einen Horizont bis zu dem man aber nur theoretisch schauen kann, weil das Universum erst ab einem Alter von etwa 378 000 Jahren – dem Rekombinationszeitpunkt – durchsichtig wurde und man praktisch nur bis zu diesem Zeitpunkt zurückschauen kann. Ein Zurückblicken in der Zeit ist aber auch gleichzeitig ein Blicken in die Tiefen des Raumes. Die Rückblicksentfernung zum Rekombinationszeitpunkt nennt man in Anlehnung an [4] Gesichtsfeld. Das Gesichtsfeld ist eine absolute Sichtbarkeitsgrenze, über die man optisch nicht weiter hinausschauen kann. Dies sollen die folgenden Abbildungen verdeutlichen, anhand derer die geometrischen Aspekte des Olbers'schen Paradoxons jetzt besprochen werden. Die unendlich groß zu denkenden Ebenen stellen den um eine Dimension



[6] Genauer ausgedrückt ist das zurzeit favorisierte kosmologische ΛCDM-Modell gemeint. Das ist ein Friedmann-Lemaître-Kosmos bestehend aus etwa 73 % dunkler Energie, beschrieben durch die von Einstein eingeführte kosmologische Konstante Λ, weiter aus 23 % kalter dunkler Materie (**C**old **D**ark **M**atter), 4,5 % baryonischer Materie und „Spuren" von Strahlung.

reduzierten Raum dar und stehen senkrecht auf der nach oben weisenden Zeitachse[7], die von der blauen Weltlinie des Beobachters repräsentiert wird. Man kann sich also das „ganze“ raum-zeitliche Universum wie einen riesigen Stapel übereinander gelegter Papierseiten vorstellen, wobei jede Seite den gesamten Raum zu einer bestimmten Zeit darstellt. Hier werden zwei Raumschnitte (Ebenen) gezeigt. Die senkrechten Linien werden Weltlinien genannt und repräsentieren beispielsweise einen Stern oder eine Galaxie an einem Ort im Verlauf der Zeit. Die blaue Linie sollen „Wir“ als Beobachter auf der Erde sein. Und „Wir“ können nur das sehen, was auf dem Lichtkegel – dem hier aufgeschnittenen Kegelmantel und nicht im Kegelinneren – liegt. Der untere Rand dieses auch Vergangenheits- oder Rückwärtslichtkegel genannten Kegelmantels ist das Gesichtsfeld, unser optischer Horizont.

Dem Olbers'schen Paradoxon liegt die Newtonsche Physik mit ihrem unveränderlichen Raum und einer überall gleichmäßig verlaufenden Zeit zugrunde. Die Sterne existieren nach den Annahmen der damaligen Zeit seit Ewigkeiten und werden immer weiter leuchten. Jeder Raumschnitt (Ebene) sieht also zu jeder Zeit gleich aus. Ein Beobachter kann „heute“ nur die Sterne auf dem Vergangenheitslichtkegel – also den Schnittpunkten von Kegelmantel und Weltlinie – sehen und das in einer vergangenen Zeit, die zur Entfernung proportional ist. Sterne auf den schwarz gezeichneten Weltlinien sind sichtbar, der Stern auf der braunen (noch) nicht. Da aber Sterne seit ewiger Zeit existieren sollen, ist der Vergangenheitslichtkegel, nicht wie in der Skizze, nach unten begrenzt, sondern setzt sich unendlich weit in Raum und Zeit fort. Damit sehen „Wir“ alle Sterne „gleichzeitig“ nur in unterschiedlichem Alter und das Olbers'sche Paradoxon „nimmt seinen Lauf“. Man kann auf dem Lichtkegel in jede Richtung blicken und wird irgendwo auf einen Stern – also einen Schnittpunkt von Kegelmantel und Weltlinie – treffen. Existieren Sterne dagegen nicht seit ewiger Zeit oder ist ihr Leben begrenzt, so kann man sich mit Hilfe der Grafik klarmachen, dass dann nur ein verschwindender Teil aller Sterne jemals gesehen werden kann, weil dann Sterne auch außerhalb des Lichtkegels „geboren“ werden und dem Licht die Zeit fehlt, alle Weltlinien während ihrer kurzen Existenz einzuholen.



In einem beschleunigt expandierendem Urknalluniversum – zurzeit Beobachtungstatsache – wird die Sichtbarkeit noch weiter eingeschränkt, was die nebenstehende Abbildung verdeutlichen soll. In diesem Weltmodell dehnt sich der Raum mit fortschreitender Zeit aus, angedeutet durch die Größenzunahme der Raumschnitte. Die Weltlinien, außer der des Beobachters, sind keine Geraden mehr sondern Kurven, die das Expansionsgesetz[8] widerspiegeln. Der Vergangenheitslichtkegel wird zu einem oben spitzen „Ei“, und unten treffen alle Lichtstrahlen wieder die Weltlinie des Beobachters. Dort fand der Urknall statt, und der beobachtbare Raum ist in einem „Punkt“ konzentriert, von dem aus später alles wegstrebte. Schlecht zu erkennen ist in dieser Grafik, welche Weltlinien vom Gesichtsfeld eingeholt werden können und welche nicht.

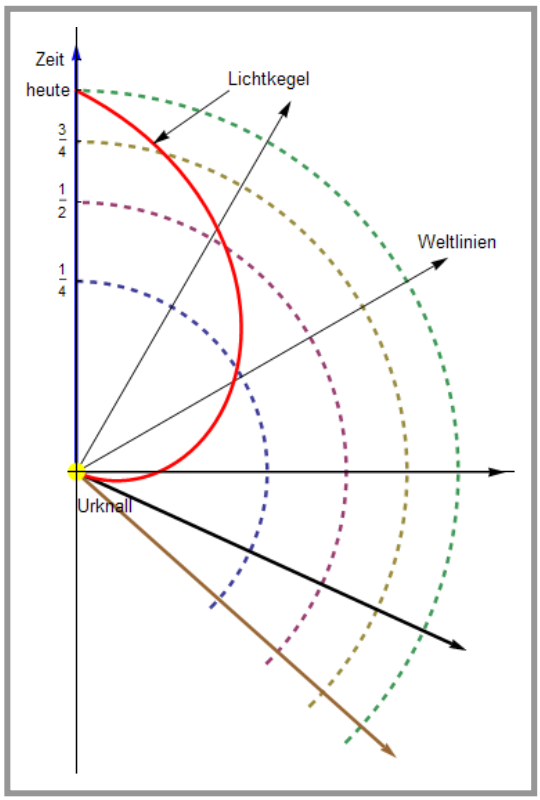
Deshalb wird der gleiche Sachverhalt nochmals in anderer Form dargestellt, bei der der vorige Mangel zwar behoben, dafür aber der Raum nicht mehr unendlich ausgedehnt ist, sondern durch einen endlichen Kreis dargestellt wird. Es bestehen folgende Analogien: Den Raumschnitten entsprechen hier die farbig gepunkteten Kreise. Die Zeit läuft ungleichmäßig[9] vergehend mit den Weltlinien aus dem Urknall in alle Richtungen heraus. Der Rand der kleinen gelben Kreisscheibe soll den Rekombinationszeitpunkt 378 000 Jahre nach dem Urknall bezeichnen, zu dem das Universum durchsichtig wurde. Von da ab konnten sich alle Photonen frei durch den Raum bewegen und die damals

[7] In Raum-Zeit-Darstellungen, die die Relativitätstheorie betreffen weist die Zeitachse meist nach oben. In nicht gekrümmten oder expandierenden Räumen breitet sich das Licht bei seiner Bewegung im Raum wegen der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit in geeignet gewählten Maßeinheiten auf um 45° gegen die Raumschnitte geneigten Geraden aus, die hier die Oberfläche eines Lichtkegels bilden.

[8] Das hier verwendete Expansionsgesetz des Friedmann-Lemaître-Modells mit obigen Parametern wird durch eine mit 2/3 potenzierte Sinushyperbolikus-Funktion beschrieben und bildet die Grundlage dieser Grafik. Etwa das erste Tausendstel des Weltalters wird durch dieses Gesetz falsch wiedergegeben, in dieser kurzen Zeitspanne herrscht ein Wurzel-Zeit-Gesetz $\sqrt{t}$.

[9] Der Berechnung liegt ein nach einem Wurzel-Zeit-Gesetz $\sqrt{t}$ expandierender Strahlungskosmos zugrunde.

ausgesandten Lichtquanten können wir heute als 2,725 K-Strahlung wahrnehmen. Weiter kann man auf optischem Wege nicht in die Zeit zurückblicken[10]. Dort endet der Vergangenheitslichtkegel – die rote Kurve. Der Lichtkegel ist in dieser Darstellung ebenso verzerrt, wie in der vorstehenden Abbildung. Die heutige Entfernung zu einem gedachten Objekt zur Rekombinationszeit entspricht der Länge des grün gepunkteten Kreises vom blauen Beobachter bis zur dicken schwarzen Weltlinie, in dem hier verwendeten Modell sind dies ca. 41 Milliarden Lichtjahre[11]. Würde unser Weltall nicht beschleunigt expandieren, so würde der rote Vergangenheitslichtkegel auf der gelben Kreisscheibe immer weiter im Uhrzeigersinn mit der Zeit wandern und so, wie oben, weitere Weltlinien von Sternen einholen, so dass diese sichtbar würden. Wegen der beschleunigten Expansion kann aber das Gesichtsfeld nur noch bis zu einer maximalen Entfernung von 57 Milliarden Lichtjahren wandern und bleibt von da an als absolute Beobachtungsgrenze dort stehen. Die braune Weltlinie wird also nicht mehr eingeholt. Trotz der riesigen Größe des Gesichtsfeldes ist das grob betrachtet nur ein Billionstel der Entfernung, die für die Sichtbarkeitsgrenze benötigt würde.[12]



Fazit: Der Urknall schränkt die ewige Existenz der Sterne in der Vergangenheit ein, die Sternphysik sagt ein endliches Leben voraus, und von den ohnehin zu „dünn gesäten“ Sternen kann man nur einen verschwindenden Teil sehen, den das Gesichtsfeld – die reale Sichtbarkeitsgrenze – gestattet. Unser Nachthimmel wird also ewig dunkel bleiben, ja sogar noch dunkler werden. Und die Sichtbarkeitsgrenze spielt dabei nur eine theoretische Rolle.

Quellen

Web

[1] Göhring, R. 2006: Das Olbers'sche Paradoxon, http://www.starkenburg-sternwarte.de/vortraege/OlbersschesParadoxon_Goehring.pdf

[2] Lisker, T. 2011: Warum ist es nachts dunkel?, http://www.youtube.com/user/spektrumverlag#p/c/7/fBn1sD_XGZE

[3] Spergel, D. N., et al. 2010: Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations, http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/dr4/pub_papers/sevenyear/basic_results/wmap_7yr_basic_results.pdf

Literatur

[4] Liebscher, D.-E.: Kosmologie, J. A. Barth, Leipzig, Heidelberg, 1994

[5] Harrison, E.R.: Kosmologie, Verlag Darmstädter Blätter, 2. Aufl. 1984

[6] Müller, P.H.: Lexikon der Stochastik, Akademie-Verlag Berlin, 3. Aufl. 1980

[7] Rebhan, E.: Theoretische Physik I und II, Spektrum, Heidelberg, Berlin, 2001, 2005

[8] Schmutzer, E.: Theoretische Physik I und II, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1989

[10] Rechnerisch und gedanklich lässt sich der Vergangenheitslichtkegel (rote Linie) bis zum Urknall fortsetzen. Der so entstehende Horizont wird Teilchen- oder Partikelhorizont genannt. Er ist ohne Berücksichtigung einer frühzeitigen Inflation nur geringfügig größer als das Gesichtsfeld und umschreibt oder begrenzt das Gebiet, mit dem wir kausal verbunden sind, also die Region, die uns im Laufe der Zeit hätte beeinflussen können. Könnte man mit Neutrinos auf nichtoptischem Weg „sehen“, so könnte man bis etwa zur ersten Sekunde nach dem Urknall zurückschauen.

[11] Diese Werte wurden unter Verwendung eines Modells berechnet, das alle Phasen der kosmologischen Expansion gut annähert und eine inflationäre Phase in der Frühzeit berücksichtigt.

[12] Um den Text im 6. Abschnitt nicht mit mathematischen Feinheiten zu überlasten, wurde auf die saubere Unterscheidung von Lichtkegeln und Horizonten in jeweils mitbewegten bzw. physikalischen Koordinaten verzichtet.